Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ГОУ ВПО ВСГТУ)

Д. Н. Хамханова

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Улан-Удэ
Издательство ВСГТУ
2006

УДК 389:531.7(075)
БКК 30.607я73
Х 188

Печатается по решению редакционно-издательского совета Восточно-Сибирского государственного технологического университета

Рецензенты
гл. инженер СЦ «ЦАСИС» *В. Б. Бадмаев*
доц.кафедры «Метрология, стандартизация и сертификация» *Б. С. Жаргалов*

Хамханова Д. Н.
Х 188 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ: Учебное пособие. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2006. –168 с.
ISBN 5 - 89230-171-0

Материал изложен по всем разделам и темам вузовской программы курса, необходимой по основам теории измерения. Рассмотрены основные понятия и термины в метрологии, измеряемые величины, единицы физических величин, факторы, влияющие на результат измерений, методы обработки экспериментальных данных, средства измерений, а также методы обеспечения единства измерения.

Предназначено студентам специальностей 200501 «Метрология и метрологическое обеспечение», 200502 «Стандартизация и сертификация (по отраслям пищевой промышленности)» и 220501 «Управление качеством».

ISBN 5-89230-171-0

ББК 30.607я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в измерениях возникла у человека незапамятные времена. Для этого в первую очере использовались подручные средства. Из глубины веков до нас дошла единица веса драгоценных камней – карат, что в переводе с языков Древнего Востока означает «семя боба», «горошина», единица аптекарского веса – гран, что в переводе с латинского, французского, английского, испанского означает «зерно». Многие меры имели антропометрическое происхождение или были связаны с трудовой деятельностью.

Очень удобным и для измерения длины оказались размеры частей человеческого тела, отсюда антропологические названия мер: локоть, вершок, ладонь, пядь, ступня и др. Локоть – расстояние от локтя до конца среднего пальца, вершок – «верх перста» – длина фаланги указательного пальца; пядь – от «пядь»; «пятерня» – расстояние между вытянутых большого и указательного пальцев; сажень – от «сягать», «достигать», т. е. можно достать; косая сажень – предел от подошвы левой ноги до конца пальца вытянутой вверх правой руки; маховая сажень – расстояние между концами средних пальцев вытянутых в стороны рук. Самое первое упоминание сажени встречается в «Слове о зачале» Киево-Печерского монастыря», приписываемом летописцу Руси Нестору (1017 г.) Очевидно, среди мер длины сажень получила наибольшее распространение. В практике Древней Руси применялись несколько разновидностей сажени, не совпадающих по размерам: простая – 152 см, косая – 216 или 248 см, маховая – 176 см. Из мер длины, являющихся долями сажени, (ГОСТ 8.009-84) локоть упоминается в «Русской правде», а пядь описана паломниками XII–XVI вв. В конце XV в. в результате оживления торговли с Турцией появилась новая мера длины – аршин. Как и локоть, аршин является мерой антропологического характера. Первоначальную его длину соотносили с длиной всей руки от плеча (72 см). Термин «локоть» имеет исконно русское происхождение, а аршин прочно вошел в русскую систему мер.

Также имелись меры, обусловленные возможностями человека и животного. К ним относятся: вержение камня – расстояние, на которое может быть брошен камень; перестрел – расстояние, на которое пролетела выпущенная из лука стрела (60– 70) м; день в пути – в зависимости от образа жизни день пути мог быть пешим (25 км), конным (50–75 км); коровий крик – мера индусских племен для определения расстояния, на котором человек еще слышал крик коровы; в русских договорных грамотах о пожаловании земель встречается аналогично «бычий рев».

Как правило, меры сыпучих и жидких тел были различны. Рожь, горох, овес и другое зерно измеряли кадями, половинками, четвертями, осьминами. В качестве мер жидких тел употребляли бочку, ведро – и корчагу, точные размеры и соотношения которых неизвестны. По более поздним источникам можно предположить, что бочка содержала 10 ведер, ведро - около 24 фунтов воды (9,8 кг), корчага – 1,5–1,75 ведра. Начиная с XI в. при торговле, в ходу были берковцы, гривни, гривенки и золотники. По источникам XVI-XVII вв. берковец = 10 пудам = 400 гривнам = 800 гривенкам; гривенка = 2 полу гривенкам = 48 золотникам = 1200 почкам = 4800 пирогам. Примерное соотношение между этими единицами массы и килограммом составляет: берковец – 163,8 кг; пуд – 16,38 кг; гривенка – 204,8 г; золотник – 4,27 г; почка – 171 мг; пирог – 43 мг.

Из древних русских письменных источников следует, что гривна и золотник имели хождения на Руси и как единицы веса, и как денежные единицы. Итак, на

территории первого русского государства существовали разнообразные меры. Однако ценность такого богатства мер была бы значительно ниже, если бы не было того, что мы теперь называем поверкой мер. Имеются сведения о применении образцовых мер и хранении их в церквях и монастырях, а также об их ежегодных поверках.

Так «золотой пояс» великого князя Святослава Ярославовича (1073–1076) служил образцовой мерой длины. В одном из списков «Патерика Киево-Печерского монастыря» сказано: «Се мера и основание». Там же упоминаются и деревянные меры, которые считались священными благодаря их соответствию золотому поясу. Так, в уставе новгородского князя Всеволода «О церковных судах и людях и о мерилах в торговле» предписывалось: «...торговые весы и мерила блюсти без пакости, ни умаливати, ни умножати, а всякий год взвешивати» (1136 г.). Нарушитель мог быть наказан вплоть до «...предания казни смертью». Важнейшим метрологическим документом является Двинская грамота Ивана Грозного от 21 декабря 1550 г. о новых печатных мерах – осьминах. Ее медные экземпляры рассылались по городам на хранение выборным людям: старостам, соцким, целовальникам. С этих мер надлежало делать клейменые деревянные копии для использования в обиходе. Образцовые меры, с которых снимались первые копии, хранились централизованно в приказах Московского государства. Таким образом, можно говорить о том, что еще при Иване Грозном началось создание государственной системы обеспечения единства измерений.

1 ОБЪЕКТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1 Основные понятия в метрологии

Слово «метрология» происходит от древнегреческих слов «метрон» и «логос», что в переводе означает «мера» и «учение». Таким образом, метрология – это наука об измерениях. Сегодня метрологию понимают как науку об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и требуемой точности.

Основным терминам и определениям всегда уделялось достаточно серьезное внимание. Так, в 1970 г. был введен в действие ГОСТ 16263–70 «Метрология. Термины и определения». Развитие метрологии вызвало необходимость уточнить терминологию, учитывая при этом изданные за рубежом Международные терминологические словари. В 1994 г. был введен новый рекомендательный документ – методическая инструкция МИ 2247-93 «Рекомендация. Метрология. Термины и определения», разработанная научно-производственным объединением «НПО ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» (Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии).

Физическая величина – свойство, в качественном отношении общее со многими физическими объектами, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта. Например, температура, масса, длина – свойство, общее в качественном отношении со многими физическими объектами, но индивидуальное для каждого.

Размер физической величины – количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию «физическая величина».

Значение физической величины – оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единицах.

Согласно ГОСТ 16263, измерение – нахождение

значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

МИ 2247-93 дает более расширенное понятие: измерение – совокупность операций, выполняемых с помощью технического средства, хранящего единицу величины, позволяющего сопоставить измеряемую величину с ее единицей и получить значение величины. То есть ранее под измеряемой величиной понималась только физическая величина, а сейчас – как физические, так и нефизические величины.

Единица физической величины – физическая величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное 1 (ГОСТ 16263).

Результат измерения – значение величины, найденное путем ее измерения (ГОСТ 16263).

Единство измерений – состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью (ГОСТ 16263) .

Погрешность измерения – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Истинное значение физической величины – значение физической величины, которое идеальным образом отражало бы в качественном и количественном отношении соответствующее свойство объекта.

Действительное значение физической величины – значение физической величины, найденное экспериментальным методом и несколько приближающееся к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него.

Средство измерений – техническое средство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические характеристики (МХ).

Метод измерений – совокупность приемов

использования принципов и средств измерений. Принцип измерений – совокупность явлений, на которых основаны измерения.

Отметим, что метод измерений обусловлен целью измерения и в свою очередь определяет, как следует организовать взаимодействие средства измерений с объектом измерения и каким образом извлечь из исходных и опытных данных требуемую информацию.

Объект измерения – реальный физический объект, элемент природной или технологической среды. Он обладает многими особенностями (свойствами), находится в многосторонних и сложных связях с другими объектами. Человек не в состоянии представить себе объект целиком, во всем многообразии его свойств и во всех взаимосвязях. Поэтому взаимодействие человека с объектом – исследование или преобразование возможно лишь на основе модели объекта.

Априорная информация – информация, которой владеют до измерения. При ее отсутствии измерение невозможно.

Условие измерения – важный фактор, определяющий состояние объекта и эффективность использования средства измерений.

Абсолютная погрешность измерения – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины:

$$\Delta X = X_{ист} - X, \qquad (1)$$

где $X_{ист}$ – истинное значение измеряемой величины;

X – значение, полученное при измерении.

Относительная погрешность измерения – отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\Delta X_{отн} = \frac{\Delta X}{X_{ист}} \cdot 100\%. \qquad (2)$$

Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Грубая погрешность – погрешность измерения, значительно превышающая ожидаемую при данных условиях.

Инструментальная погрешность измерения – составляющая погрешности измерения, зависящая от погрешностей средств измерений (СИ).

Погрешность метода измерений – составляющая погрешности измерения, происходящая от несовершенства метода измерения.

Погрешность отсчитывания – составляющая погрешности измерения, происходящая от недостаточно точного отсчитывания показаний СИ.

Погрешность интерполяции при отсчитывании – составляющая погрешности отсчитывания, происходящая от недостаточно точного оценивания на глаз доли деления шкалы, соответствующей положению указателя.

Погрешность от параллакса – составляющая погрешности отсчитывания, происходящая вследствие визирования стрелки, расположенной на некотором расстоянии от шкалы, в направлении, неперпендикулярном поверхности шкалы.

Влияющая величина – физическая величина, не являющаяся данным СИ, но оказывающая влияние на результат измерений этим СИ.

Точность измерений – качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Условия измерения влияют на состояние объекта. Изменяя состояние объекта, условия влияют на выделенную физическую величину и через нее – на измеряемую величину. Влияние условий измерений на СИ проявляется в изменении метрологических характеристик.

Отсутствие однообразия в выражении погрешности измерения в различных странах представляло определенные трудности в практической работе, в частности при анализе результатов международных сличений, что привело к пересмотру понятия погрешность измерения.

В 1978 г., отмечая несогласованность в выражении неопределенности результатов измерений в разных странах, высшая метрологическая инстанция – Международный комитет мер и весов (МКМВ) поручил Международному бюро мер и чесов (МБМВ) совместно с национальными лабораториями стандартов разработать рекомендацию по этому вопросу.

МБМВ разослало подробные анкеты 32 заинтересованным национальным метрологическим лабораториям и для информации 5 международным организациям. К началу 1979 г. были получены ответы от 21-й лаборатории. Почти все сошлись на том, что нужно создать единую методику для выражения неопределенности измерения, включающую объединение отдельных составляющих неопределенности в общую неопределенность. Однако по этому вопросу о том, как именно это сделать, мнения разошлись.

Тогда МБМВ создало рабочую группу для выработки соответствующих предложений. В нее вошли представители 11 национальных лабораторий стандартов:

1. Национальное бюро метрологии (BNM): Национальный институт метрологии (JNM), Национального училища искусств и ремесел (CNAM), Париж, Франция.

2. Институт метрологии им. Дж. Колонетти (JMGC), Турин, Италия.

3. Национальное бюро эталонов (NBS), Вашингтон, США.

4. Национальный институт метрологии (JNM), Бейджинг, Китай.

5. Национальная физическая лаборатория (NPL), Теддингтон, Великобритания.

6. Национальная физическая лаборатория Индии (NPLJ), Нью-Дели, Индия.

7. Национальная физическая исследовательская лаборатория (NPRL), Претория, ЮАР.

8. Федеральное бюро метрологии (OFM), Берн, Швейцария.

9. Физико-технический институт (PTB), Брауншвейг, ФРГ.

10. Государственный поверочный институт (SP), Борос, Швеция.

11. Лаборатория Ван Свиден (NSL), Дельфт, Нидерланды.

Рабочая группа разработала международную рекомендацию JNC-1 (1980) «Выражение неопределенности результатов измерений». МБМВ в 1981 г. одобрило эту рекомендацию, а в 1986 г. утвердило ее.

Основной идеей рекомендации является отказ от понятия погрешность измерения. Вместо нее рекомендовано применять такой показатель, как неопределенность результата измерения.

Создание детального руководства, основанного на JNC-1 МБМВ, передало международной организации по стандартизации (ИСО), которая лучше представляет потребности и интересы промышленности и торговли.

В ИСО эта работа была поручена техническому комитету по метрологии (ТК–4), в функции которого входит разработка и согласование основополагающих подходов к измерениям.

Техническая консультативная группа ИСО по метрологии создала рабочую группу (JSO / TAG 4/ WG 3) из экспертов, представляющих наиболее авторитетные в мире организации: по метрологии – МБМВ и международную организацию по законодательной метрологии (МОЗМ); по стандартизации – ИСО и международную электротехническую комиссию (МЭК).

Итогом работы этой группы было создание Руководства по выражению неопределенности измерения, которое было издано в Швейцарии в 1993 г. под эгидой 7 международных организаций: МБМВ, МЭК, ИСО, МОЗМ, Международного союза по чистой и прикладной химии (JUPAC), Международного союза по чистой и прикладной физике (JUPAP), Международной федерации клинической химии (JFCC).

Слово «неопределенность» означает сомнение, и в широком смысле «неопределенность измерения» означает сомнение относительно достоверности результата измерения. Руководство дает следующее определение этому термину: «Неопределенность измерения» – есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует дисперсию значений, которые могли быть приписаны измеряемой величине.

Примечания.

1. Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или данное кратное ему) или полуширина интервала, имеющего установленный уровень доверия.

2. Неопределенность измерения обычно включает много составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены из статистического распределения результатов рядов измерений и характеризоваться экспериментальными стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые также могут отличаться стандартными отклонениями, оценивают из предполагаемых распределений вероятностей, основанных на опыте или другой информации.

3. Очевидно, что результат измерения является наилучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющие неопределенности, включая те, которые возникают от систематических эффектов, таких как составляющие, связанные с поправками и эталонами сравнения, вносят вклад в дисперсию.

1.2 Измеряемые величины

К объектам измерений относятся не только физические, но и нефизические величины. Например, в пищевой промышленности часто измеряют такие показатели, как вкус, цвет, запах, внешний вид, вид в разрезе и т. д. Они определяют совокупность свойств продукции, удовлетворяющих определенные потребности в соответствии с их назначением. Мерой этих свойств являются показатели качества. В квалиметрии – разделе метрологии, изучающей измерение показателей качества продукции, различают следующие группы показателей качества:

– назначения;
– надежности;
– технологичности;
– унификации;
– патентно-правовые;
– эргономические;
– эстетические;
– транспортабельности;
– безопасности;
– экологические;

– экономного расходования трудовых и материальных ресурсов.

Показатели назначения характеризуют свойства продукции, определяющие основные функции, для выполнения которых она предназначена и обуславливает область ее применения.

Показатели надежности определяют свойство продукции сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонта, хранения и транспортирования.

Показатели технологичности характеризуют совокупность свойств конструкции изделия, которая определяет ее приспособленность к достижению оптимальных затрат при производстве, эксплуатации и ремонте для заданных показателей качества, объема выпуска и условий выполнения работ.

Показатели унификации характеризуют степень использования в продукции стандартизованных изделий и уровень унификации составных частей изделия.

Патентно-правовые показатели характеризуют степень патентной защиты и патентной чистоты изделия.

Эргономические показатели, характеризующие систему «человек – изделие – среда», устанавливают соответствие свойств изделия тем или иным свойствам человека.

Эстетические показатели продукции характеризуют ее эстетическое воздействие на человека.

Показатели транспортабельности характеризуют приспособленность продукции к перемещениям, не сопровождающимся ее использованием и потреблением.

Показатели безопасности характеризуют свойства продукции, обуславливающие безопасность человека при потреблении или использовании продукции.

Показатели экономного расходования сырья и материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов характеризуют те свойства изделия, которые отражают его техническое совершенство по количеству потребляемых в процессе производства ресурсов.

Экологические показатели характеризуют уровень вредного воздействия на окружающую среду в процессе эксплуатации изделия.

В свою очередь каждая группа показателей качества подразделяется на подгруппы, а подгруппы показателей качества – на единичные.

1.3 Количественная и качественная характеристики измеряемых величин

Количественной характеристикой измеряемых величин является размер. Качественной характеристикой измеряемых величин – ее размерность. Последняя обозначается символом dim от латинского слова «dimension», которое переводится как размер и как размерность в зависимости от контекста.

Размерности основных физических величин Международной системы единиц обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Например, размерность длины $\dim l = L$, размерность массы – $\dim m = M$, размерность времени – $\dim t = T$, размерность электрического тока – $\dim i = I$. Производные величины могут быть образованы как с помощью основных, так и других (уже образованных) производных величин.

При определении размерности производных физических величин руководствуются следующими правилами:

1. Размерности левой и правой частей уравнений не могут не совпадать, так как сравнивать между собой можно только одинаковые свойства.

2. Алгебра размерностей мультипликативна, т.е. состоит из одного математического действия – умножения.

Размерность произведения нескольких величин равна произведению их размерностей. Если зависимость между величинами имеет вид:

$Q = A \cdot C \cdot B$, то $\dim Q = \dim A \cdot \dim C \cdot \dim B$.

Размерность частного при делении одной величины на другую равна отношению их размерностей, т. е. если

$Q = \frac{A}{B}$, то $\dim Q = \frac{\dim A}{\dim B}$.

Размерность любой величины, возведенной в некоторую степень, равна произведению ее размерности в той же степени. То есть если $Q = A^n$, то $\dim Q = \dim^n A$.

Следовательно, размерности производной физической величины можно выразить через размерности основных величин с помощью степенного одночлена:

$\dim Q = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \ldots,$

где L, M, T – размерности основных физических величин;

α, β, γ…– показатели размерности.

Каждый из показателей может быть отрицательным, положительным, целым или дробным числом, нулем. Например, размерность давления имеет вид: $L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}$.

Если все показатели размерности равны нулю, то величина называется безразмерной.

Величина называется относительной, если она определяется как отношение двух одноименных величин. Относительная величина выражается в процентах, если отношение двух одноименных величин составляет 10^{-2}; если равно 10^{-3}, то она выражается в промилле; если же это отношение составляет 10^{-6}, то – в миллионных долях.

1.4 Измерительные шкалы

1.4.1 Шкала порядка

Простейшим видом измерения является экспериментальное сравнение одного размера с другим, по принципу: «что больше (меньше)?» или «что лучше (хуже)?»

Можно на глаз сравнить рост одного человека с ростом другого. Число сравниваемых размеров может быть достаточно большим. Расположенные в порядке возрастания или убывания, они образуют *шкалу порядка*. Построив людей по росту, можно, пользуясь шкалой порядка, сделать вывод о том, кто выше, однако сказать, насколько выше или во сколько раз, нельзя.

Расстановка размеров в порядке их возрастания или убывания для получения измерительной информации по шкале порядка называется *ранжированием.*

По шкале порядка сравниваются между собой размеры, которые сами остаются неизвестными.

Результатом сравнения является ранжированный ряд.

Математической моделью теоретического сравнения между собой двух размеров одной меры по шкале порядка служит неравенство:

$$Q_i \leq Q_j. \tag{3}$$

Для облегчения измерений на шкале порядка некоторые точки на ней можно зафиксировать в качестве опорных (реперных). Знания, например, оценивают по реперной шкале, имеющей следующий вид: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. Точкам реперной шкалы могут быть поставлены в соответствие цифры, называемые баллами. Такие шкалы называются реперными. Так, например, по реперной шкале измеряется сила ветра (табл. 1), сила землетрясений (табл. 2), твердость минералов и т. п.

Таблица 1 – Шкала Бофорта

Балл	Название ветра	Признаки
0	Штиль	Дым идет вертикально
1	Тихий	Дым идет слегка наклонно
2	Легкий	Ощущается лицом, шелестят листья
3	Слабый	Развеваются флаги
4	Умеренный	Поднимается пыль
5	Свежий	Вызывает волны на воде
6	Сильный	Свистят в вантах, гудят провода
7	Крепкий	На волнах образуется пена
8	Очень крепкий	Трудно идти против ветра
9	Шторм	Срывает черепицу
10	Сильный шторм	Вырывает деревья с корнем
11	Жестокий шторм	Большие разрушения
12	Ураган	Опустошительное действие

Таблица 2 – Международная сейсмическая шкала

Балл	Название землетрясения	Краткая характеристика
1	2	3
1	Незаметное	Отмечается только сейсмическими приборами
2	Очень слабое	Ощущается отдельными людьми в состоянии полного покоя
3	Слабое	Ощущается лишь небольшой частью населения
4	Умеренное	Распознается по мелкому дребезжанию и колебанию предметов и оконных стекол и штукатурки, пробуждение спящих
5	Довольно сильное	Общее сотрясение зданий, колебания мебели, трещины оконных стекол штукатурки, пробуждение спящих
6	Сильное	Ощущается всеми. Картины падают со стен, откалываются куски штукатурки, легкое повреждение зданий

Окончание табл. 2

1	2	3
6	Сильное	Ощущается всеми. Картины падают со стен, откалываются куски штукатурки, легкое повреждение зданий
7	Очень сильное	Трещины в стенах каменных домов. Антисейсмические, а также деревянные постройки остаются невредимыми
8	Разрушительное	Трещины в крутых склонах и на сырой почве. Памятники сдвигаются с места или опрокидываются. Дома сильно повреждаются
9	Опустошительное	Сильное повреждение и разрушение каменных домов
10	Уничтожающее	Крупные трещины в почве. Оползни и обвалы. Разрушение каменных построек, искривление железнодорожных рельсов
11	Катастрофа	Широкие трещины в земле. Многочисленные оползни и обвалы. Каменные дома совершенно разрушаются
12	Сильная катастрофа	Изменение в почве достигает огромных размеров. Многочисленные обвалы, оползни, трещины. Возникновение водопадов, подпруд на озерах. Отклонение течения рек. Ни одно сооружение не выдерживает

Измерения по шкале порядка являются самыми несовершенными, наименее информативными. Они не дают ответа на вопрос о том, насколько и во сколько раз один размер больше другого.

На шкале порядка определены (т. е. могут выполняться) лишь некоторые логические операции. Например, если первый результат больше второго, а второй больше третьего, то и первый больше третьего. Или если хоть один из размеров больше третьего, то их сумма тоже больше третьего, то их разность меньше третьего.

Эти свойства шкал называются свойствами транзитивности. В то же время на шкале порядка не определены (т. е. не могут выполняться) никакие арифметические действия. Интервалы между реперными шкалами точками неизвестны (на шкале не установлен масштаб), поэтому нельзя баллы складывать, вычитать, умножать или делить. В принципе их можно заменить любыми символами (буквами или знаками). Измерительная информация, полученная по шкале порядка, не пригодна для математической обработки (переработки). Невозможно и внесение в результат измерительного эксперимента поправки, ибо если ни сами сравнимаемые размеры, ни разность между ними неизвестны, то остаются неизвестным, изменится ли соотношение между ними после учета поправки.

Структурная схема средства измерения по шкале порядка (рис. 1) состоит из устройства сравнения (компаратора) и устройства принятия решения (эксперт или экспериментатор). В таких случаях он же принимает решение.

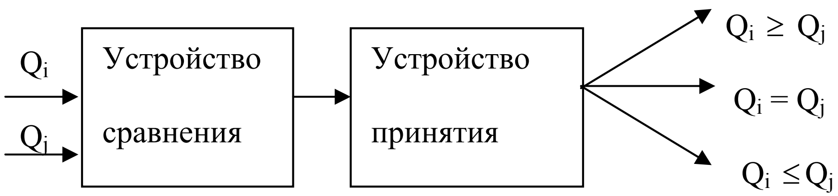


Рисунок 1 – Структурная схема измерений по шкале порядка.

В других случаях, когда компаратором является техническое устройство, решение может приниматься как человеком, так и автоматически.

1.4.2 Шкала интервалов

Если на шкале порядка зафиксировать две опорные точки в качестве реперных, а интервал между ними разделить на равные части и одну из реперных точек принять за нуль, то получаем шкалу интервалов. **Начало отсчета на шкале интервалов произвольное.**

Примеры шкалы интервалов служат температурные шкалы Цельсия, Реомюра, Фаренгейта и Кельвина. На температурной шкале Цельсия за начало отсчета принята температура таяния льда. Второй опорной точкой является температура кипения воды. Интервал между температурой таяния льда и температурой кипения воды разбит на 100 равных интервалов – градации или градусов. Вся шкала Цельсия разбита на градусы как в сторону положительных, так и в сторону отрицательных интервалов.

На температурной шкале Реомюра, но интервал между этой температурой и температурой кипения воды разбит не на 100, а на 80 равных частей.

На температурной шкале Фаренгейта тот же интервал разбит на 180 частей. Следовательно, градус Фаренгейта меньше градуса Цельсия. Кроме того, начало отсчета интервалов на шкале Фаренгейта сдвинуто на 32^0 в сторону низких температур.

Вопросами создания температурных шкал в разное время занимались многие известные ученые.

Температурные шкалы приведены в таблице 3.

Шкала интервалов является более информативной, чем шкала порядка. На ней можно производить такие математические действия, как сложение и вычитание**.** Интервалы с учетом знаков можно складывать друг с другом и вычитать друг из друга.

Таблица 3 – Температурные шкалы

Автор шкалы	Термодинамическая жидкость	Опорные точки	Интервалы	Соотношение с градусом Цельсия
1	2	3	4	5
Ньютон	Льяное семя	0^0 – таяния льда; 34^0 – кипения воды	1/34	$1^0 H = 2{,}94^0 C$
Гук	Спирт	-7^0 – таяния льда; -13^0 – наибольшее летнее тепло	1/150	$1^0 Г = 2{,}4^0 C$
Фаренгейт	Спирт, ртуть	0^0 – температура смеси льда, воды и нашатыря; 212^0 – кипения воды	1/212	$1^0 F = 5/9^0 C$
Реомюр	Спирт	0^0 – таяния льда; 80^0 – кипения воды	1/80	$1^0 R = 1{,}25^0 C$
Делиль	Ртуть	0^0 – кипения воды; 150^0 – таяния льда;	Изменение объема ртути на 0,0001	$1^0 Д = 0{,}667^0 C$
Ломоносов	Ртуть	0^0 – таяния льда; 150^0 – кипения воды	-//-	$1^0 Л = 0{,}667^0 C$
Цельсий (перонач.)	Ртуть	0^0 – кипения воды; 100^0 – таяния льда;	1/100	$1^0 C = 1^0 C$

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5
Цельсий и Штремер	Ртуть	0^0 – таяния льда; 100^0 – кипения воды	1/100	$1^0 C = 1^0 C$
Кельвин и др.	Ртуть	$273{,}16^0 K$ – температура тройной точки воды	$1K = \frac{}{27}$	$1^0 K = 1^0 C$
Ренкин	Ртуть	$491{,}67^0\ Ra$ – температура таяния льда	$1^0 Ra = 1^0 F$	$1^0 Ra = 5/9^0 C$

Благодаря этому можно определить, насколько один размер больше или меньше другого.

1.4.3 Шкала отношений

Если на шкале интервалов за начало отсчета принять абсолютный ноль, то мы получаем шкалу отношений. Примером может служить температурная шкала Кельвина. В ней за начало отсчета принят абсолютный нуль температуры, при котором прекращается тепловое движение молекул. более низкой температуры быть не может. Второй реперной точкой служит температура таяния льда. По шкале Цельсия интервал между этими реперными точками равен 273,16 ^{0}С, поэтому на шкале Кельвина интервал между этими точками делят на 273,16 частей. Каждая такая часть называется Кельвином и равна градусу Цельсия, что облегчает переход от одной шкалы в другую.

Шкала отношений является самой совершенной и наиболее информативной. На ней определены все математические действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

1.5 Разновидности измерений

Различают следующие разновидности измерений:
– инструментальные;
– экспертные;
– комбинаторные.

Инструментальные называются измерения, выполняемые с помощью технических средств. Они подразделяются на автоматические, автоматизированные и ручные. Автоматические измерения выполняются без участия человека. При автоматизированных измерениях роль человека полностью не исключена. При разделении измерений на автоматические, автоматизированные и ручные отличительным признаком классификации является отношение времени, затрачиваемого на ручные операции t_p, к общему (суммарному) времени измерения t_Σ. Если $t_p / t_\Sigma > 0{,}5$, то измерения считаются ручными; если $0{,}02 \le \frac{t_p}{t} \le 0{,}5$, то автоматизированными; если $\frac{t_p}{t} < 0{,}02$, то автоматическими.

Экспертный метод измерений применяют только в том случае, когда инструментальные измерения проводить невозможно или экономически невыгодно.

Разновидностью экспертного метода являются органолептические измерения, основанные на использовании органов чувств человека: зрения, слуха, осязания, обоняния и вкуса. Кроме того, различают измерения, основанные на ощущениях и впечатлениях. К примеру первого относятся измерения времени. Измерения, основанные на впечатлениях, проводятся при проведении различных конкурсов и соревнований например, конкурсы мастеров искусства: скульпторов, поэтов, артистов.

Органолептические измерения широко применяются в обиходе, в пищевой и парфюмерной промышленности, в медицине.

Измерения называются комбинаторными, если органолептические измерения сочетаются с инструментальными.

1.6. Классификация измерений

Измерения весьма разнообразны, их можно классифицировать по различным признакам. В настоящее время принята следующая классификация:

– по характеристике точности – равноточные и неравноточные;

– по числу измерений в серии – однократные и многократные;

– по отношению к изменению измеряемой величины – статические и динамические;

– по метрологическому назначению – метрологические и технические;

– по выражению результата измерений – абсолютные и относительные:

– по общим приемам получения результатов измерений – прямые, косвенные[1].

Равноточные – ряд измерений, какой-либо величины, выполняемых одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях. Если одно из этих условий не выполняется, то измерение называют не равноточным.

Однократное – измерение, выполняемое один раз,

[1] В литературе при классификации измерений по общим приемам получения результатов измерения их принято разделять на прямые, косвенные, совместные и совокупные. В международной рекомендации «Руководство по выражению неопределенности измерения» измерения подразделяются только на прямые и косвенные.

например определение времени по часам. При необходимости (для получения большой уверенности в результате) проводятся многократные измерения, результат которых получают из нескольких следующих друг за другом измерений. За результат многократного измерения принимается среднее арифметическое из результатов однократных измерений:

$$\overline{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i \, , \qquad (4)$$

где n – число однократных измерений;

Q_i – результат i-го однократного измерения.

Статические – измерения физической величины неизменной на протяжении времени измерения. Например, измерения размеров детали, измерения массы вещества.

Если размер физической величины изменяется с течением времени, то такие измерения называются динамическими. Примером таких измерений служит измерение расстояния от А до едущей машины.

Технические измерения используются в ходе контроля изготовления изделий, технических процессов, например, определение размеров детали при токарной обработке или же измерения давления пара в котле.

Метрологические измерения предназначены для воспроизведения единиц физических величин или для передачи их размера рабочим средством измерений. Метрологические измерения производятся при помощи эталонов или образцовых средств измерения.

Абсолютные – измерения, приводимые к значению измеряемой величины, выраженному в ее единицах. При измерении длины детали штангенциркулем результат выражается в единицах измеряемых величин.

При прямых измерениях значение физической величины находят из опытных данных.

К прямым относятся измерения, результаты которых

получают с помощью средств измерения, не находящихся под воздействием данной измеряемой величины, проградуированной непосредственно в единицах той же величины. Математически прямое измерение представлено формулой:

$$Q = g[Q], \qquad (5)$$

где Q – измеряемая величина;

g – число единиц;

$[Q]$ – единица физической величины.

Уравнение (5) называется основным уравнением измерения.

Относительными называются измерения, при которых проводятся измерения отношения величины к однородной величине, играющей роль единицы, или измерения величины по отношению к однородной величине, применяемой за исходную.

Косвенным называется измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Например, нахождение плотности вещества по его массе и геометрическим размерам или определение сопротивления (электрического) однородного проводника постоянного поперечного сечения:

$$R = \frac{\rho L}{s},$$

где R – электрическое сопротивление;

S – площадь поперечного сечения;

L – длина образца;

ρ – удельное сопротивление проводника.

Роль косвенных измерений велика в естествознании, при изучении явлений, не поддающихся прямым измерениям, например, изучения явления в астрономии, молекулярной и квантовой физике. Косвенные измерения позволяют более точный результат, чем прямые.

1.7 Единицы измерений и системы единиц

Числовые значения измеряемых величин зависят от того, какие используются единицы измерений. Поэтому роль последних очень велика. Если допустить произвол в выборе единиц, то результаты измерений окажутся несопоставимыми между собой, т. е. нарушится *единство измерений.* Чтобы этого не произошло, единицы измерений устанавливаются по определенным правилам и закрепляются законодательным путем. Наличие законодательной метрологии отличает эту науку от других естественных наук (математики, физики, химии и др.) и направлено на борьбу с произволом в выборе таких решений, которые не диктуются объективными закономерностями, а принимаются по соглашению.

Совокупность единиц измерений основных и производных величин называется *системой единиц.* Не во всех областях измерений системы единиц сформировались окончательно и закреплены соответствующими законодательными актами. Наилучшим образом в этом отношении обстоят дела в области измерения физических величин.

В физике общие правила, конструирования систем единиц, были сформулированы Гауссом в 1832 г. Они сводятся к следующему:

1) выбираются основные физические величины,

2) устанавливаются единицы основных физических величин. Для этого какому-либо размеру каждой основной физической величины приписывается числовое значение, равное 1. Выбор этого размера является произвольным и определяется исключительно соображениями удобства его использования в обиходе. Для обеспечения единства измерений все эти размеры, называемые *единицами основных*

физических величин, должны быть закреплены законодательным путем. Обычно их называют просто *основными единицами;*

3) устанавливаются единицы производных физических величин, также называемые обычно просто *производными единицами.*

Пусть, например, производная физическая величина Q образуется путем перемножения двух основных величин A и B. Тогда, значение Q согласно выражению (5), можно выразить через значения A и B:

$$q[Q]=a[A]b[B],$$

а производная единица может быть выражена через основные единицы с помощью соотношения

$$[Q]=\frac{ab}{q}[A][B].$$

Если же производная величина Q образуется посредством деления основных величин A и B, то

$$q[Q]=\frac{a[A]}{b[B]},$$

и производная единица выражается через основные единицы следующим образом:

$$[Q]=\frac{a}{qb}[A][B]^{-1}.$$

В общем случае производные единицы выражаются через основные единицы с помощью степенного одночлена:

$$[Q]=k\cdot[A]^{\alpha}\cdot[B]^{\beta}\cdot[C]^{\gamma}\cdots$$

где k – безразмерный коэффициент пропорциональности;

α, β, γ, … – показатели размерности.

В последнее время к коэффициенту k стали предъявлять еще одно требование: он должен равняться 1. Получаемые при этом условии так называемые *когерентные,* или *согласованные,* системы единиц являются наиболее простыми и удобными в обращении.

В 1832 г. Гауссом была разработана система единиц, названная им *абсолютной.* В этой системе основными, единицами являются миллиметр, миллиграмм, секунда. В дальнейшем по мере развития науки и техники возникали все новые и новые системы, пока их обилие не стало тормозом научно-технического прогресса. В этих условиях XI Генеральная конференция по мерам и весам в 1960 г. приняла Международную систему единиц физических величин, получившую у нас в стране сокращенное обозначение СИ (от начальных букв SI в словах Systeme international). Последующими Генеральными конференциями по мерам и весам в первоначальный вариант СИ внесены некоторые изменения, В Советском Союзе и странах Восточной Европы Международная система единиц является обязательной с 1 января 1980 г.

Основные единицы Международной системы:

– **метр** (международное обозначение m; русское – м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 долю секунды. При таком определении метра, принятом XVII Генеральной конференцией по мерам и весам в 1983 г., длина не может считаться основной физической величиной, так как выражается через скорость и время. По всей вероятности, за этим решением XVII Генеральной конференции по мерам и весам должно последовать изменение структуры Международной системы единиц;

– **килограмм** (международное обозначение kg; русское – кг) – единица массы, равная массе международного прототипа килограмма;

– **секунда** (международное обозначение s; русское – с) – время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия–133;

– **ампер** (международное обозначение А; русское – А) – единица силы электрического тока. Ампер – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызывал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2\ 10^{7}$ Н;

– **кельвин** (международное обозначение K; русское – К) – единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды;

– **кандела** (международное обозначение cd; русское – кд) – единица силы света. Кандела – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср;

– **моль** (международное обозначение mol; русское – моль) – единица количества вещества. Моль равен количеству вещества, содержащему столько же структурных элементов (атомов, молекул или других частиц), сколько атомов содержится в 0,012 кг углерода-12.

Ранее были предусмотрены также две дополнительные единицы:

– **радиан** (международное обозначение rad; русское – рад) – единица плоского угла, равная внутреннему углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу;

– **стерадиан** (международное обозначение sr; русское – ср) – единица телесного угла. Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности этой сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Решением 20-й Генеральной конференции по мерам и весам (1995 г.) эти две дополнительные единицы причислены к производным.

Производные единицы СИ образуются из основных и дополнительных по правилам образования когерентных производных единиц, т. е. связаны с ними соотношением

$$[Q]= м^{a} \cdot кг^{\beta}\text{-}c^{\gamma} \ldots .$$

Некоторым из них даны названия в честь великих ученых: *ньютон, герц, паскалъ, кулон, ом, сименс, тесла, беккерель* и другие. Обозначения таких единиц, как международные, так и русские, пишутся с заглавной буквы.

Десятичные кратные и дольные единицы образуются с помощью множителей и приставок, наименования, происхождение и обозначения которых приведены в таблице 4.

К наименованию единицы допускается присоединять только одну приставку (например, пикофарада, а не микро-микро-фарада). У единиц, образованных как произведение или отношение нескольких единиц, приставку присоединяют, как правило, к наименованию первой единицы, например килопаскаль – секунда на метр (кПа, с/м), а не паскаль – килосекунда на метр. Кратные и дольные единицы выбирают обычно таким образом, чтобы числовое значение величины находилось в диапазоне от 0,1 до 1000 (например, для длины $L = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ м = 75 мкм = 0,075 мм = 75000 нм следует выбрать 75 мкм, так как в других случаях числовое значение выходит за пределы указанного диапазона).

В настоящее время на практике применяются только три системы единиц: СГС, СИ, МКГСС.

Система единиц СГС. Основные единицы в системе СГС – сантиметр, грамм, секунда.

Система МКГСС. Эта система предназначена для механических измерений. Основные единицы в системе МКГСС – метр, килограмм-сила, секунда. Основная единица килограмм-сила определяется как сила, сообщающая массе весом 1 кг ускорение, равное 9,8 м/с^2.

Кроме этих систем единиц, в разное время существовали и другие системы. Среди них были наиболее распространены системы МТС и МКСА. Основными единицами в системе МТС являются метр, тонна, секунда.

Основные единицы в системе МКСА – метр, килограмм, ампер, секунда.

Таблица 4

Множитель	Приставка	Обозначение приставки Международное
10^{24}	иотта	Y
10^{21}	зета	Z
10^{18}	экса	E
10^{15}	пета	P
10^{12}	тера	T
10^{9}	гига	G
10^{6}	мега	M
10^{3}	кило	k
10^{2}	гекто	h
10^{1}	дека	da
10^{-1}	деци	d
10^{-2}	санти	c
10^{-3}	милли	m
10^{-6}	микро	η
10^{-9}	нано	n
10^{-12}	пико	p
10^{-15}	фемто	f
10^{-18}	атто	a
10^{-21}	зепто	z
10^{-24}	иокто	y

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1 Основной постулат метрологии

Любое измерение по шкале отношений предполагает сравнение неизвестного размера с известным и выражение первого через второй в кратном или дольном отношении. При измерении физических величин в качестве известного размера естественно выбрать единицу СИ. Тогда процедура сравнения неизвестного значения с известным и выражения первого через второе в кратном или дольном отношении запишется следующим образом: $\frac{Q}{[Q]}$.

На практике непосредственно неизвестный размер не всегда может быть представлен для сравнения с единицей. Например, жидкости, и сыпучие вещества представляются на взвешивание в таре. Очень маленькие линейные размеры могут быть измерены только после увеличения их микроскопом или другим прибором. В первом случае процедура сравнения выглядит как определение отношения $\frac{Q+\vartheta}{[Q]}$, во втором – $\frac{чQ}{[Q]}$, где в рассматриваемых примерах υ – масса тары, а χ – коэффициент увеличения.

Само сравнение в свою очередь происходит под влиянием множества случайных и неслучайных факторов, точный учет которых провести невозможно, а результат совместного воздействия непредсказуем. Поэтому уравнение измерения по шкале отношений имеет вид:

$$\frac{Q+\vartheta}{[Q]} + з = х. \qquad (6)$$

Из-за случайного характера η *отсчет* по шкале отношений x получается все время разным.

Основной постулат метрологии гласит, что отсчет является случайным числом.

Уравнение (6) является *математической моделью измерения по шкале отношений.* Отсчет в ней не может быть представлен одним числом. Его можно лишь описать словами или математическими символами, представить массивом экспериментальных данных, таблично, графически, аналитическим выражением и т. п.

Наиболее исчерпывающим описанием отсчета являются как распределение вероятности $P(x_i)$, так и функция распределения вероятности $F(x_i)$.

Плотность распределение вероятности $p(x)$, так и функция распределения вероятности $F(x)$ служат в теории вероятности моделями эмпирических законов распределения вероятности, получаемых из экспериментальных данных методами математической статистики.

После выполнения измерительной процедуры в уравнении (6) остаются два неизвестных: Q и η. Неслучайное значение ύ либо должно быть известно до измерения, либо устанавливается посредством дополнительных исследований. Слагаемое η, являющееся случайным, не может быть известно в принципе. Поэтому определить значение измеряемой величины невозможно.

$$Q = x\,[Q] - \eta\,[Q] - ύ \qquad (7)$$

Равенство (7) соблюдается точно благодаря тому, что при повторных выполнениях измерительной процедуры случайное изменение второго слагаемого в правой части всякий раз влечет за собой точно такое же изменение первого. О таких слагаемых говорят, что они коррелированы (взаимосвязаны) между собой. Разность между коррелированными значениями двух случайных величин неслучайна, но в данном случае неизвестна. Поэтому строгого решения уравнение (7) не имеет.

На практике удовлетворяются приближенным решением. Для этого используются результаты специального исследования, называемого метрологической аттестацией средства измерений и методики выполнения измерений. В ходе этого исследования приближенно определяется среднее значение второго слагаемого в правой части формулы (7):

$$Н \approx \overline{з[Q]}.$$

Среднее значение не является случайным. Поэтому после замены случайного второго слагаемого в правой части уравнения (7) неслучайным значением Н получается приближенное решение:

$$Q \approx x\ [Q] - Н - ύ, \qquad (8)$$

в котором результат измерения Q – случайное значение измеряемой величины.

Первое слагаемое в правой части выражения (8) называется показанием:

$$X = x\ [Q].$$

Оно подчиняется тому же закону распределения вероятности, что и отсчет, но отличается от последнего тем, что

$$\dim X = \dim Q.$$

Два последних слагаемых в правой части формулы (8) представляют суммарную поправку:

$$\Theta = - Н - ύ,$$

которая может включать и большее количество составляющих в зависимости от числа учитываемых факторов. Поправка не является случайной, но может изменяться от измерения к измерению по определенному закону. Поэтому в каждое отдельное значение показания X_i, может вноситься своя поправка Θ_i .

Результат измерения Q подчиняется тому же закону распределения вероятности, что показание и отсчет, но смещенному по оси абсцисс на значение суммарной поправки. Отдельное его значение

$$Q_i = X_i + \Theta_i, \qquad (9)$$

получаемое всякий раз после выполнения измерительной процедуры, называется результатом однократного измерения. Среднее арифметическое значение результата измерения, полученное при многократном независимом измерении одной и той же величины постоянного размера:

$$\overline{Q}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\ , \qquad (10)$$

называется результатом многократного измерения.

Уравнение измерения интервала записывается аналогично уравнению (6):

$$\frac{\Delta Q + \vartheta}{\mathbf{[Q]}} + \eta = x\ , \qquad (11)$$

где ΔQ – значение разности между двумя размерами физической величины. Анализ этого уравнения не отличается от анализа уравнения (6).

Математической моделью измерения по шкале порядка служит неравенство:

$$Q_1 + \eta_1 \gtrless Q_2 + \eta_2, \qquad (12)$$

описывающее процедуру сравнения двух размеров одной и той же измеряемой величины. Результатом сравнения в этом случае является не отсчет, а решение о том, какой из размеров больше, либо они одинаковы. Не исключена возможность как правильных, так и неправильных решений. Следовательно, результат сравнения двух размеров по шкале порядка является случайным, что соответствует основному постулату метрологии.

2.2 Законы распределения вероятности и их числовые характеристики

Математический аппарат теории вероятности широко используется в метрологии. Рассмотрим поэтому некоторые свойства законов распределения вероятности, являющихся моделями эмпирических законов распределения. Последние получаются из экспериментальных данных методами математической статистики.

1. Прежде всего, отметим, что функция *F (x)* определяет вероятность того, что отдельный результат, получен-

ный по формуле (6) или (11), будет меньше ее аргумента:

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \int p(x)dx$$

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \int p(x)dx$$

2. Так как вероятность не может быть отрицательной, то

$$F(x) \ge 0.$$

Чем больше *x,* тем больше вероятность того, что ни один результат, полученный по формуле (6) или (11), не превысит этого значения, т.е. $F(x)$ – неубывающая функция:

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ $F(x)$ меняется от 0 до 1.

3. Результат, полученный по формуле (6) или (11), меньше некоторого x_1 с вероятностью $F(x_1)$ и меньше другого $x_2 > x_1$ с вероятностью $F(x_1)$. Следовательно, вероятность того, что результат сравнения по формуле (6) или (11) окажется в интервале $[x_1; x_2]$, равна разности значений $F(x)$ на границах этого интервала:

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

У аналогового измерительного прибора x_1 и x_2 можно выбирать сколь угодно близкими друг к другу. При $x_1 \to x_2$ $F(x_2) - F(x_1) \to 0$. Поэтому у аналоговых измерительных приборов вероятность того, что указатель отсчетного устройства остановится на какой-либо конкретной точке шкалы, равна 0. Отсюда следует, что

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = P\{x_1 < x \le x_2\} = P\{x_1 \le x < x_2 = P\{x_1 < x < x_2\},$$

т. е. крайние точки можно включать, а можно и не включать в интервал.

4. Плотность распределения вероятности $p(x)$ связана с функцией распределения вероятности $F(x)$ соотношением

$$p(x) = F'(x).$$

Поэтому $P(x)$ называют иногда *дифференциальной функцией распределения вероятности.*

В свою очередь $F(x)$ может быть получена интегрированием $p(x)$ в соответствующих пределах:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx.$$

Геометрическая интерпретация этой операции показана на рис. 1, а $F(x_0)$ иногда называют *интегральной функцией распределения вероятности.*

5. Так как $F(x)$ – неубывающая функция, то ее производная не может быть отрицательной:

$$p(x) \ge 0.$$

6. Вероятность того, что отдельный результат окажется в интервале $[x_1; x_2]$, равна площади, ограниченной графиком функции $p(x)$, осью абсцисс н перпендикулярами к ней на границах интервала (см. рис. 1):

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

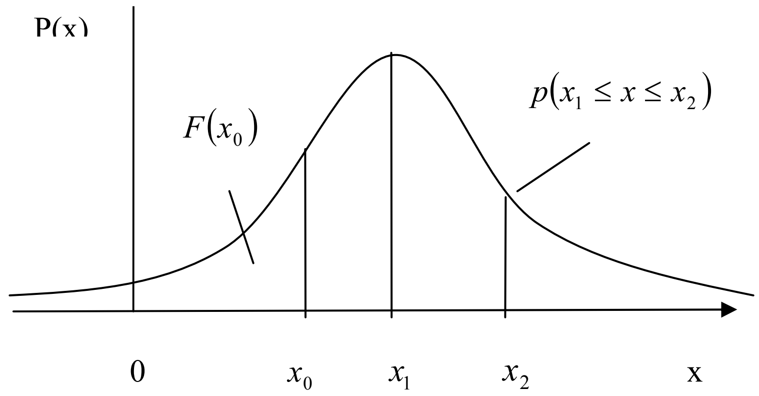


Рисунок 1 – Дифференциальная функция распределения вероятности

7. При расширении интервала до бесконечности рассматриваемое событие становится достоверным. Поэтому площадь, ограниченная графиком функции $p(x)$ и осью абсцисс, равна 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 .$$

Описание отсчета или результата измерения с помощью законов распределения вероятности является наиболее полным, но неудобным. Во многих случаях ограничиваются приближенным описанием закона распределения вероятности с помощью его *числовых характеристик,* или *моментов.* Все они представляют собой некоторые средние значения, причем, если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, моменты называются *начальными*, а если от центра закона распределения – *центральными.*

Общее правило образования начальных моментов:

$$\overline{x}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x)dx ,$$

где r – номер момента.

Важнейшим начальным моментом является первый – *среднее значение:*

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx ,$$

характеризующее математическое ожидание отсчета при бесконечном повторении процедуры измерения. Иногда математическое ожидание удобнее обозначать символом М (х). Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание неслучайного числа равно самому этому числу:

$$\mathbf{M}(a) = a;$$

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathbf{M}(ax) = a\mathbf{M}(x),$$

где a = const;

3) математическое ожидание алгебраической суммы случайных чисел равно алгебраической сумме их математических ожиданий:

$$\mathbf{M}(x + y - z) = \mathbf{M}(x) + M(y) - \mathbf{M}(z);$$

4) математическое ожидание произведения независимых случайных чисел равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathbf{M}(x \cdot y \cdot z) = \mathbf{M}(x)\,\mathbf{M}(y)\,\mathbf{M}(z);$$

5) математическое ожидание отклонения случайного числа от его математического ожидания равно нулю:

$$\mathbf{M}[x - \mathbf{M}(x)] = 0.$$

Мерой рассеяния отдельных результатов около их среднего значения **служит второй центральный момент.** Общее правило образования центральных моментов записывается следующим образом:

$$\overline{(x-\overline{x})^r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^r p(x)dx ,$$

откуда сразу видно, что первый центральный момент тождественно равен нулю:

$$\overline{(x-x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \overline{x}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \overline{x} - \overline{x}\cdot 1 = 0$$

Второй центральный момент называется *дисперсией* и обозначается σ_x^2:

$$\sigma_x^2 = \overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 p(x)dx .$$

Иногда дисперсию удобнее обозначать символом **D** (x). Свойства дисперсии:

1) дисперсия неслучайного числа равна нулю:

$$\mathbf{D}(a) = 0;$$

2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

$$\mathbf{D}(ax) = a^2\,\mathbf{D}(x),$$

где a =const;

3) дисперсия алгебраической суммы двух случайных чисел:

$$\mathbf{D}(x \pm y) = \mathbf{D}(x) + \mathbf{D}(y) \pm 2p\sqrt{\mathbf{D}(x)\,\mathbf{D}(y)},$$

где *коэффициент корреляции*

$$p = \frac{\mathbf{M}\{[x - \mathbf{M}(x)][y - \mathbf{M}(y)]\}}{\sqrt{\mathbf{D}(x)\,\mathbf{D}(y)}};$$

4) дисперсия алгебраической суммы независимых случайных чисел равна арифметической сумме их дисперсий:

$$\mathbf{D}\,(x + y - z) = \mathbf{D}\,(x) + \mathbf{D}\,(y) + \mathbf{D}\,(z);$$

5) дисперсия случайного числа равна разности между математическим ожиданием его квадрата и квадратом математического ожидания:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{M}(x^2) - \mathbf{M}^2\,(x).$$

Чем больше дисперсия, тем значительнее рассеяние результатов относительно х. Это наглядно видно на рис. 2, где представлены кривые плотности одного и того же закона распределения вероятности отсчета при различных дисперсиях.

В метрологии в качестве меры рассеяния чаще используют *среднее* *квадратическое отклонение:*

$$у_x = +\sqrt{у_x^2}.$$

Находит применение и **третий центральный момент:**

$$\overline{(x - \bar{x})^3} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^3 p(x)dx.$$

Мерой несимметричности распределения вероятности служит *асимметрия:*

$$м = \frac{\overline{(x - \bar{x})^3}}{у_x^3},$$

которая может быть положительной и отрицательной. Для симметричных распределений вероятности отсчета асимметрия равна нулю. На рис. 3 в качестве иллюстрации

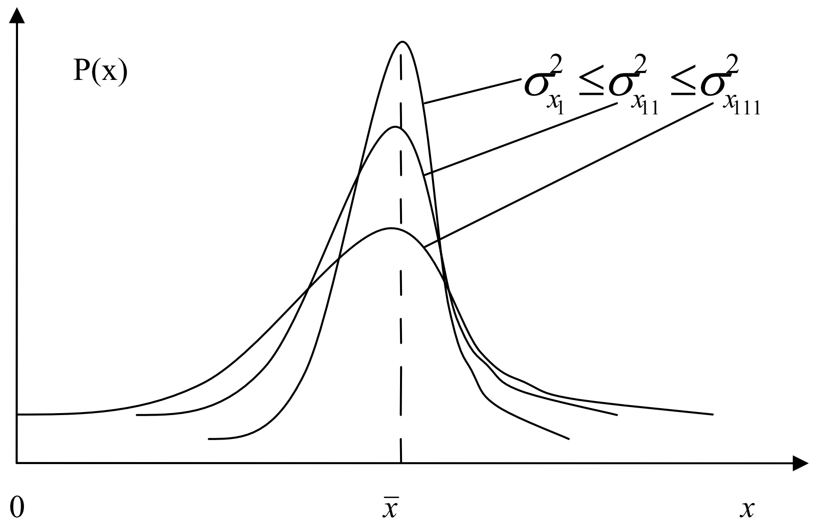


Рисунок 2 – Графики плотности распределения вероятности при различной дисперсии

приведены примеры симметричного и несимметричных законов распределения вероятности с разными математическими ожиданиями.

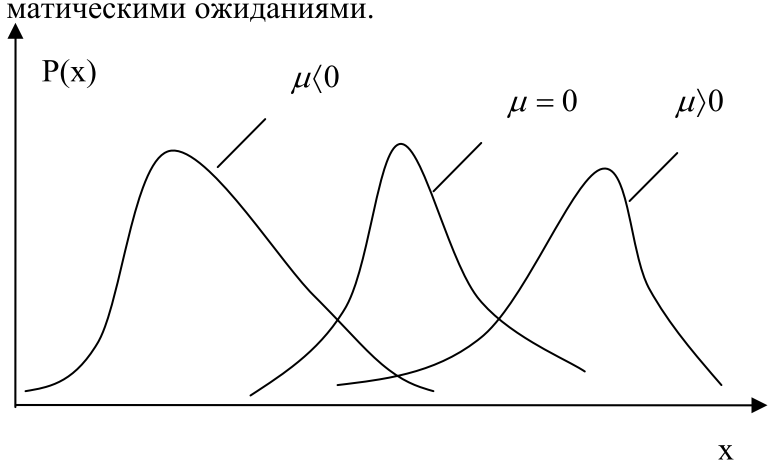


Рисунок 3 – Симметричные и несимметричные распределения вероятности отсчета

Четвертый центральный момент используется для оценки заостренности дифференциальной функции распределения вероятности. Мерой заостренности служит *эксцесс:*

$$н = \frac{\overline{(x-\bar{x})^4}}{у_x^4},$$

равный трем у закона распределения вероятности отсчета, кривая плотности вероятности которого имеет колоколообразную форму. Кривые с более острой вершиной имеют больший эксцесс, с более пологой – меньший, вплоть до отрицательного.

Мерой неопределенности случайного числа является *энтропия*

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx -$$

среднее значение логарифма плотности вероятности, взятое со знаком минус. Так как *p(x)<1,* то энтропия всегда положительна. Она равна нулю у неслучайного числа и максимальна при равномерной плотности распределения вероятности.

Модели эмпирических законов распределения вероятности отсчета – дифференциальная и интегральная функции распределения вероятности, как и все без исключения моменты, обладают важным качеством: будучи характеристиками случайного числа, сами они не являются случайными. Описание с их помощью отсчета или результата измерения было бы очень удобным, если бы эти характеристики можно было получить. Но на практике это невозможно, так как измерительная процедура по формулам (6), (11) не может быть повторена бесконечное число раз. Поэтому и в дальнейшем они будут использоваться только качестве моделей.

2.3 Точечные оценки числовых характеристик

Оценки числовых характеристик законов распределения вероятности случайных величин, изображаемые на числовой оси точкой, называются точечными. В отличие от самих числовых характеристик оценки являются случайными и их значения зависят от объема выборки (экспериментальных данных).

Оценки должны удовлетворять трем условиям: быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Состоятельной называется оценка, которая сходится по вероятности к оцениваемой числовой характеристике.

Несмещенной является оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой числовой характеристике.

К эффективной относится та оценка из всех возможных несмещенных, которая имеет наименьшее рассеяние.

Рассмотрим n независимых значений Q_i, полученных при измерении величины постоянного размера. Пусть каждое из них отличается от среднего значения на случайное отклонение δ_i :

$$Q_1 = \overline{Q} + \delta_1;$$
$$Q_2 = \overline{Q} + \delta_2;$$
…………………
$$Q_i = \overline{Q} + \delta_i;$$
$$Q_n = \overline{Q} + \delta_n.$$

Сложив между собой правые и левые части и разделив на n, получим:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \overline{Q} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \lim_{n\to\infty} \overline{Q} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{Q} = \overline{Q}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0 ,$$

откуда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \overline{Q} .$$

То есть среднее арифметическое результата измерения, сходящееся, по вероятности, к среднему значению $\overline{Q}$, при любом законе распределения вероятности результата измерения является состоятельной точечной оценкой среднего значения:

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(Q_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[M\left(\overline{Q}\right) + M(\delta_i)\right] = \overline{Q}$$

Следовательно, математическое ожидание при любом законе распределения вероятности результата измерения является не только состоятельной, но и смещенной оценкой среднего значения. Этим обеспечивается правильность результата многократного измерения. То сеть несмещенность среднего значения результата измерения от значения измеряемой величины обеспечивает правильность измерений.

Точность результата многократного измерения зависит от эффективности оценки среднего значения. Чем эффективнее оценка, тем выше точность.

Эффективность оценки среднего значения можно

определить с помощью метода наименьших квадратов:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\overline{Q_j} - \overline{Q}\right)^2 = \min . \qquad (13)$$

Сумма квадратов отклонений от среднего значения равно минимуму. Исследуем функцию в левой части уравнения (13) на экстремум. Функция достигает минимума, когда первая производная равна 0. Следовательно,

$$\frac{\partial\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\overline{Q_j} - \overline{Q}\right)^2\right)}{\partial \overline{Q_j}} = 0 .$$

Возводим обе части в квадрат:

$$\frac{\partial\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\overline{Q_j}^2 - 2\overline{Q_j}\cdot\overline{Q} + \overline{Q}^2\right)\right)}{\partial \overline{Q_j}} = 0 ;$$

$$\frac{\partial\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{Q_j}^2\right)}{\partial \overline{Q_j}} - \frac{\partial\left(\sum\limits_{j=1}^{m} 2\overline{Q_j}\cdot\overline{Q}\right)}{\partial \overline{Q_j}} + \frac{\partial \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{Q}^2}{\partial \overline{Q_j}} =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{m} \overline{Q_j} - 2\overline{Q_m} = 0 ;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{Q_j} - m\overline{Q} = 0 .$$

Если в качестве оценки выбрать среднее арифметическое, то получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_i} Q_i\right) - m\overline{Q} = 0 . \qquad (14)$$

Равенство (14) будет выполняться в силу состоятельности среднего арифметического. Следовательно, среднее арифметическое является не только состоятельной и несмещенной оценкой, но и наиболее эффективной оценкой среднего значения по критерию наименьших квадратов.

Рассмотрим оценку дисперсии. По аналогии со средним арифметическим в качестве оценки дисперсии возьмем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_i}\right)^2 .$$

Тогда,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_n}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_n}+\overline{Q}-\overline{Q}\right)^2=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Q_i-\overline{Q}\right)-\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)\right]^2=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2-2\left(Q_i-\overline{Q}\right)\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)+\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)^2=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2-2\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i-\overline{Q}\right)+\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2-\left(\overline{Q_n}-\overline{Q}\right)^2 .$$

При любом законе распределения вероятности результата измерения эта оценка является состоятельной, так как второе слагаемое при $n\to\infty$ стремится к нулю, а первое слагаемое к σ_Q^2 .

Математическое ожидание данной оценки равно:

$$M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_n}\right)^2\right\}=M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2\right\}-M\left\{\overline{Q_n}-\overline{Q}\right\}^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left\{Q_i-\overline{Q}\right\}^2-\sigma_{\overline{Q}}^2=\sigma_Q^2-\frac{\sigma_Q^2}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma_Q^2 .$$

Такая оценка является смещенной. Несмещенную оценку можно получить, если умножить ее на коэффициент

$$\frac{n}{n-1} .$$

При $n\to\infty$ этот коэффициент стремится к 1.

Следовательно, несмещенной оценкой дисперсии при любом законе распределения вероятности результата измерения является:

$$\sigma_Q=S_Q^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_n}\right)^2 .$$

Квадратный корень из нее называется стандартным отклонением:

$$S_Q=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q_n}\right)^2} .$$

Оценив среднее значение $\overline{Q}$ и среднее квадратическое отклонение σ_Q^2 результата измерения, можно вместо них использовать точечные оценки $\overline{Q}$ и S_Q .

2.4 Факторы, влияющие на результат измерений (влияющие факторы)

На результат измерения влияет множество факторов. В метрологической практике принято учитывать следующие факторы:

– объект измерения;

– субъект измерения (экспериментатор или эксперт);
– способ измерения;
– средства измерений;
– условия проведения измерения.

Объект измерения – это реальный физический объект или явление материального мира. Объектом измерения являются не только физические объекты. Так, например, объектом измерения могут быть и мастерство артистов, спортсменов и т. д.

Объект измерения обладает многими свойствами и находится в многосторонних и сложных связях с другими объектами. Например, поверхность океана зависит от кривизны Земли, т. е. при измерении поверхности океана следует учитывать кривизну Земли. Или при измерении плотности вещества необходимо быть уверенным, что он не содержит других включений и т. д.

Поэтому перед измерением объект измерения должен быть достаточно изучен. Человек не в состоянии представить объект измерения целиком, во всем его многообразии и во всех его проявлениях. Поэтому исследование объекта возможно лишь на основании его модели. Таким образом, перед измерением необходимо представить себе модель исследуемого объекта.

Модель измерения – теоретико-физическая модель или математическая конструкция, которая отражает свойства объекта, которая отражает свойства объекта, существенные для данной измерительной задачи.

Чем полнее модель соответствует измеряемому объекту, тем точнее измерения. Эксперт или экспериментатор **вносит в процесс измерения элемент субъективизма.**

Он зависит от квалификации экспериментатора, от его подготовленности к выполнению измерения, от его психофизиологического состояния, соблюдения

эргономических требований при измерений и т. п.

Эргономические требования – комплекс гигиенических, антрометрических, физиологических и психических требований, учитывающих эти свойства человека, которые проявляются в производственных и бытовых условиях.

Важное значение имеет настроение оператора, его собранность, внимание, режим работы и отдыха. Наибольшая работоспособность наблюдается в утренние часы от – до 12 и от 14 до 17. Начало смены – это период вхождения в работу, длящийся утром от 30 мин до 1,5 ч. Затем работоспособность стабилизируется в течение (1,5 – 2,5) ч.

Способ измерения – совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей в соответствии с выбранным принципом измерения. Метод (способ) измерения определяет, как следует организовать взаимодействие средства измерения с объектом и каким образом извлечь из него информацию.

Принцип измерения – совокупность физических явлений, на которых основаны измерения, например, измерение массы взвешиванием (использование силы тяжести, пропорциональной массе); температуры с использованием термоэлетрического эффекта; расхода газа или жидкости по перепаду давления в сужающих устройствах.

Очень часто измерение одной и той же величины разными методами дает совершенно непохожие результаты. Например, периметр шара можно определить двумя способами:

1) измерить диаметр и определить $P = 2\pi R$;

2) непосредственно измерить лентой или рулеткой.

Средство измерений – техническое средство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические характеристики (ГОСТ 16263-70).

Во многих измерительных процедурах на результат измерения влияет несовершенство средств измерений.

Условия проведения измерения – один из важнейших факторов, влияющих на результат измерения. К ним относятся: температура окружающей среды, давление, влажность, освещенность, вибрация, производственный шум и т. д.

Желательно, чтобы освещение было естественным. Считается, что при таком освещении производительность труда выше на 10 %, чем при искусственном. Допускается (применяется) как искусственное, так и естественное освещение. Искусственное освещение должно быть люминесцентным рассеянным. В зависимости от особенностей трудового процесса применяются три системы освещения: общее, местное и комбинированное. При особо точных измерениях допускается применять одно местное освещение, так как оно приводит к неравномерному распределению яркости в поле зрения оператора. Наиболее оптимальным является комбинированное освещение.

Измерительные приборы размещают в поле зрения оператора, ограниченной углами ± 30 % от оси в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 4).

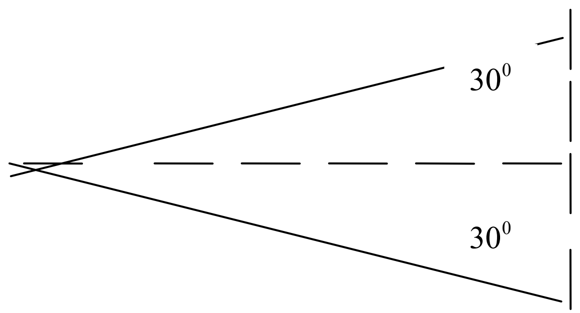


Рисунок 4

Оптимальное расстояние от шкалы до глаз оператора определяют по формуле:

$$l = \frac{h}{tg\alpha},$$

где h – высота знака, подлежащего считыванию;

α – угол, равный $(40^1 \div 50^1)$.

Уровень шума в лабораториях не должно превышать (40÷45) дБ.

Условия проведения измерений регламентированы в методиках выполнения измерений.

Исключение влияющих факторов

Способ замещения состоит в замене измеряемой величины равновеликой ей мерой, значение которой известно.

Например, при взвешивании груза на равноплечих весах его масса считается равной массе уравновешивающих гирь. Это справедливо только при равенстве плеч, так как равновесие коромысла определяется не равенством сравниваемых масс, а равенством произведения силы на плечо.

На практике плечи не строго равны между собой. Поэтому при точных измерениях пользуются способом замещения, чтобы исключить неравенство плеч. При этом первоначально груз уравновешивают любой тарой (рис. 5):

$$F_1 = m_1 \cdot r_1\,;\ F_2 = m_2 \cdot r_2\,;\ F_1 = F_2\,;\ m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2\,;$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot r_1}{r_2}. \qquad (15)$$

Потом груз заменяется гирями, при котором сохраняется равновесие.

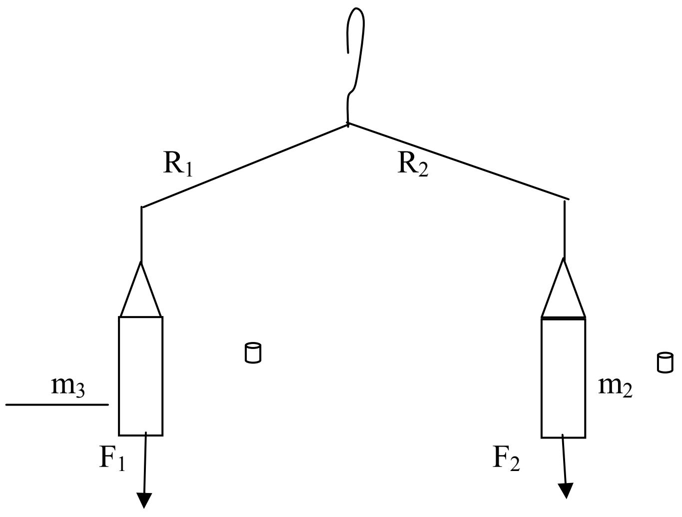


Рисунок 5

Равновесие коромысла наступает, когда выполняется равенство:

$$m_1 \cdot r_1 = m_г \cdot r_2;$$

$$m_г = \frac{m_1 \cdot r_1}{r_2}. \qquad (16)$$

Первые части уравнения (15) и (16) равны между собой, значит

$$m_2 = m_г.$$

Способ противопоставления. Рассмотрим на том же примере взвешивание на равноплечих весах. Условие равновесия коромысла запишется:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2, \qquad (17)$$

где m_1 – масса гирь;

m_2 – масса груза.

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot r_1}{r_2}.$$

Таким образом, влияние неравноплечести появляется в наличии множителя (коэффициента) $\frac{r_1}{r_2}$.

Если поместим груз на чашу весов, где раньше были гири, а гири – где раньше был груз, то получим:

$$m_2 \cdot r_1 = m_1^1 \cdot r_2 \qquad (18)$$

$$m_2 = \frac{m_1^1 \cdot r_2}{r_1}, \text{ где } m_1 \neq m_1^1.$$

Разделив первое условие равновесия (3) на второе условие равновесия (4), получим:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_1^1}. \qquad (19)$$

откуда

$$m_2 = \sqrt{m_1 \cdot m_1^1} \qquad (20)$$

В данном случае влияние неравноплечести весов исключено.

Компенсация влияющего фактора по знаку. При компенсации влияющего фактора по знаку измерения проводятся дважды, так, чтобы влияющий фактор оказывал противоположное действие, и берется среднее арифметическое. Например, механические узлы некоторых СИ имеют люфты, влияние которых исключают путем измерения сначала с больших значений, а затем с меньших значений. Пусть требуется измерить диаметр конусообразного сечения в середине (рис. 6) или же цилиндрическую деталь микроскопом.

Способ симметричных измерений. Он заключается в том, что в течение некоторого интервала времени выполняется несколько измерений одной и той же величины, а затем берется половина суммы отдельных результатов, симметричных по времени относительно середины интервала, например, исключение падения напряжения.

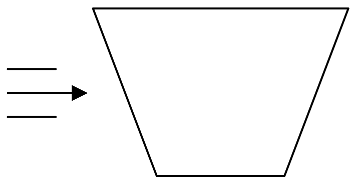


Рисунок 6

Внесение поправок. Если измерения не удается организовать так, чтобы исключить влияющие факторы, то в показание СИ вносятся поправки. Они могут быть как аддитивными, так и мультипликативными, закономерными и постоянно изменяющимися во времени; определены теоретически или экспериментально и представлять собой числа или функции. Поправки могут быть выражены таблично, в виде функции (графически) или аналитическим выражением.

Например, влияние средства измерения на измеряемую величину во многих случаях проявляется как возмущающий фактор. Учесть влияние такого фактора очень сложно. Например, ртутный термометр, опущенный в пробирку с холодной водой, сначала подогревает ее, а затем показывает температуру термодинамического равновесия.

Другим влияющим фактором СИ является инерционность СИ. При измерении быстропротекающих процессов многие из них не успевают реагировать на изменение входного сигнала, в результате которого выходной сигнал оказывается искаженным.

Или же некоторые СИ постоянно показывают или завышенные или заниженные показания, в результате дефекта при изготовлении, неправильной градуировки и многих других причин.

Влияние СИ на результат измерений определяется в результате всестороннего исследования СИ, которая называется метрологической аттестацией СИ. По результатам последней определяется поправка, которую нужно вносить в результат измерения.

Учесть влияние всех факторов невозможно, поэтому уравнение измерения по шкале отношений

$$Q \;=\; x\,[Q\;] - \eta\,[Q\;] - \upsilon$$

получается приближенным.

Учет дефицита информации осуществляется ситуационным моделированием.

Предположим, что значение измеряемой величины неизвестно. Требуется представить эту ситуацию математической моделью. Если какие-то значения Q более вероятны, то подбирается соответствующий закон распределения вероятности Q на интервале возможных значений.

Выбранный закон распределения вероятности Q является математической моделью ситуации, состоящей в том, что значение Q неизвестно.

Если на интервале от $-Q_m$ до $+Q_m$ значение измеряемой величины может иметь любое значение, то закон распределения вероятности Q принимается равномерным.

Если же на некотором интервале велика вероятность того, что Q группируется вокруг некоторого среднего значения, то, очевидно, что закон распределения вероятности принимается нормальным.

2.5 Обнаружение и исключение ошибок

Ошибки при измерениях могут возникать в результате отвлечения внимания оператора, скачка напряжения в сети, сбоя аппаратуры, описок и т. д.

При однократном измерении ошибки можно

обнаружить путем логического мышления. После их обнаружения измерения повторяют.

При многократных измерениях ошибки проявляются в том, что результат отдельного измерения заметно отличается от всех остальных. Если отличие результата от дельного измерения настолько большое, что очевидна ошибка, тогда этот результат выбрасывают как заведомо неверный.

После того как все влияющие факторы учтены и все поправки внесены в результата измерения, рассеяние результата измерения одной и той же величины постоянного размера является следствием множества причин, вклад каждого из которых незначителен по сравнению с суммарным действием всех остальных.

Центральная предельная терема в теории вероятности утверждает, что в этом случае результат измерения подчиняется нормальному закону распределения.

Центральная предельная теорема утверждает, что распределение суммы очень широкого класса независимых случайных величин ассимптотически стремится к нормальному.

Плотность распределения вероятности нормального закона распределения равна:

$$p\left(\overline{Q}\right)=\frac{1}{\sigma_Q\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(Q-\overline{Q}\right)^2}{2\sigma_Q^2}}. \qquad (21)$$

Интегральная функция нормального закона распределения:

$$F\left(Q\right)=\frac{1}{\sigma_Q\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q_0} e^{-\frac{\left(Q-\overline{Q}\right)^2}{2\sigma_Q^2}}dQ. \qquad (22)$$

Центральная предельная теорема утверждает, что

массив экспериментальных данных, полученных при измерениях одной и той же величины постоянного значения, должен группироваться вокруг среднего значения.

Выпадение отдельного результата из этого массива позволяет предположить, что он ошибочный.

Найдем вероятность, с которой любое значение результата измерения, подчиняющегося нормальному ЗРВ, должно находиться в пределах от Q_1 до Q_2 :

$$p\left(Q_1\le Q\le Q_2\right)=F\left(Q_2\right)-F\left(Q_1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_Q\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q_2} e^{-\frac{\left(Q-\overline{Q}\right)}{2\sigma_Q^2}}dQ-\frac{1}{\sigma_Q\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Q_1} e^{-\frac{\left(Q-\overline{Q}\right)^2}{2\sigma_Q^2}}dQ.$$

Произведем замену переменной:

$$\frac{Q-\overline{Q}}{\sigma_Q}=z;\quad \frac{Q-\overline{Q_1}}{\sigma_Q}=z_1;\quad \frac{Q-\overline{Q_2}}{\sigma_Q}=z_2.$$

После такой замены имеем:

$$p\left(Q_1\le Q\le Q_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_1} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=$$

$$=F\left(z_2\right)-F\left(z_1\right). \qquad (23)$$

Вероятность того, что любое значение результата измерения, подчиняющегося нормальному закону распределения вероятности, находится в интервале от Q_1 до Q_2 выражена через разность значений интегральной функции, соответствующей плотности распределения вероятности:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}, \qquad (24)$$

характеризующий так называемый нормированный нормальный закон (рис. 7).

У нормированного нормального закона распределения $\bar{z} = 0$; $\sigma_z^2 = 1$.

Нормированный нормальный закон распределения симметричный: $F(z) = 1 - F(-z)$.

Эта функция связана с функцией Лапласа (рис. 8) соотношением:

$$F(z) = \frac{1}{2} + L(z).$$

Функция Лапласа описывается выражением:

$$L(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}v^2} dv .$$

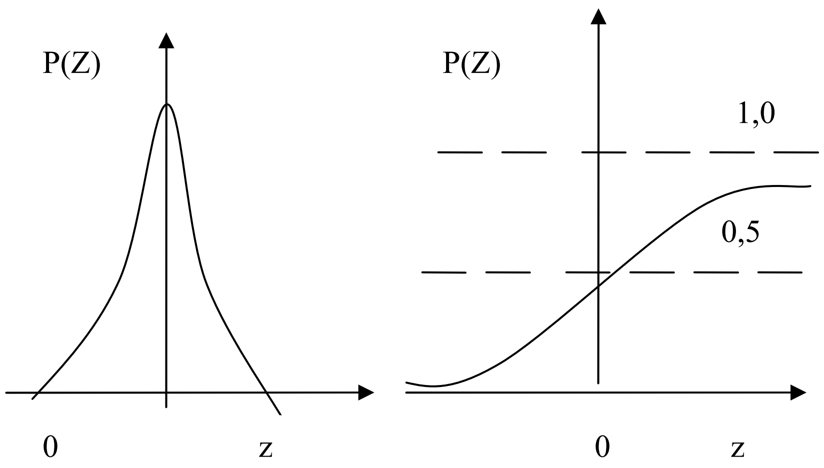


Рисунок 7

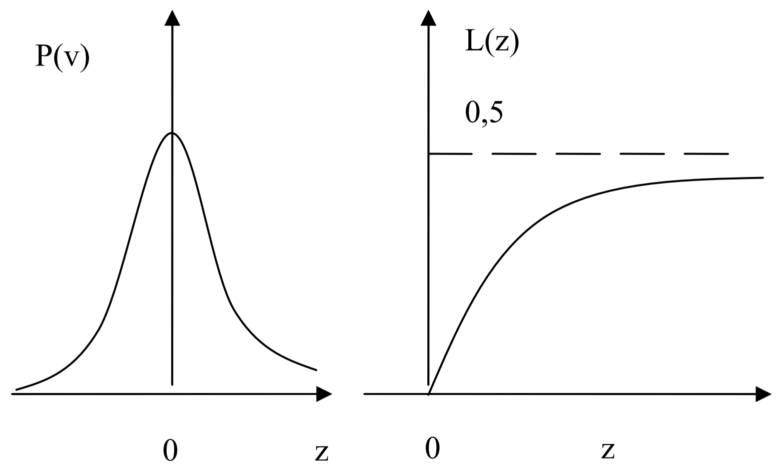


Рисунок 8

Функция Лапласа табулирована в диапазоне значений от 0 до 3,3, за пределами которых в сторону больших значений z, $L(z) = 1$.

Если выбрать $z_2 = z_1$, такую, что

$$\begin{cases} -z_1 = \dfrac{Q_1 - \overline{Q}}{\sigma_Q} \\ z_2 = \dfrac{Q_2 - \overline{Q}}{\sigma_Q} \end{cases}.$$

и обозначить эту величину через t, то вместо формулы (23) получим следующее выражение:

$$p(Q_1 \le Q \le Q_2) = F(t) - (1 - F(t)) = 2F(t) - 1 = 2L(t). \quad (25)$$

По табличным значениям на функции, входящей в уравнение (25), построена кривая (рис. 9). Параметр t играет в метрологии важную роль. Он показывает, насколько σ_Q с заданной вероятностью могут отличаться отдельные результаты измерения от своего среднего значения.

Интервал $\overline{Q} - t\sigma_Q$; $\overline{Q} + t\sigma_Q$ называется доверительным интервалом, а вероятность Р, с которой принимается решение, – доверительной вероятностью.

При Р=0,997 все значения результата многократного измерения, подчиняющегося нормальному закону распределения, группируются в пределах доверительного интервала $\overline{Q} \pm 3\sigma_Q$.

Правило трех сигм. Если при многократном измерений одной и той же величины постоянного размера сомнительные значения результата измерения больше чем на $3\sigma_Q$, то с вероятностью 0,997 оно является ошибочным и его следует отбросить.

Можно принимать решение и с меньшей вероятностью:

– с Р=0,5, тогда доверительный интервал равен $\overline{Q} \pm \frac{2}{3}\sigma_Q$;

– с Р=0,68, тогда доверительный интервал равен $\overline{Q} \pm \sigma_Q$;

– с Р=0,95, тогда доверительный интервал равен $\overline{Q} \pm 2\sigma_Q$;

– с Р=0,99, тогда доверительный интервал равен $\overline{Q} \pm 2{,}6\sigma_Q$;

– с Р=0,997, тогда доверительный интервал равен $\overline{Q} \pm 3\sigma_Q$.

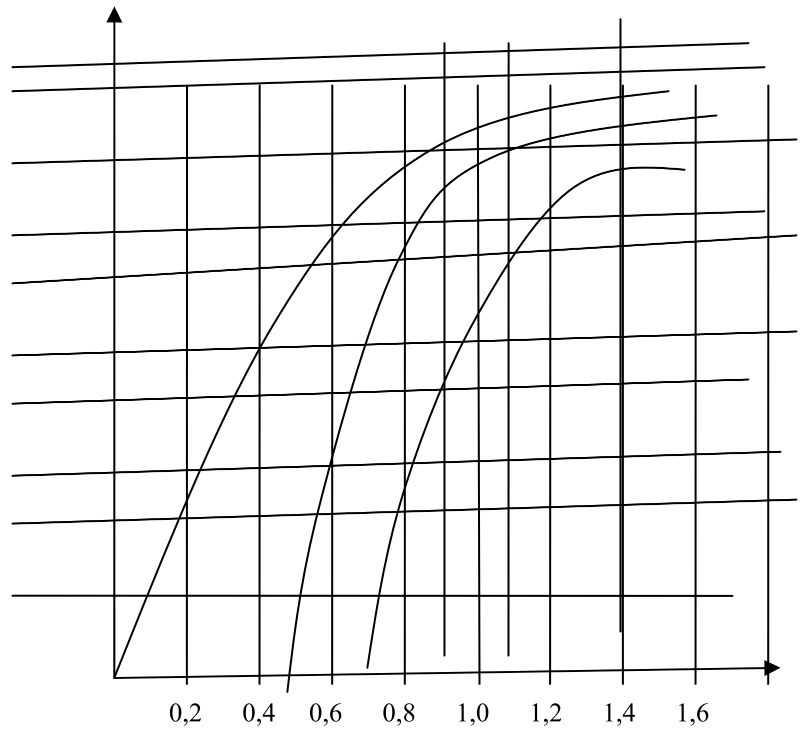


Рисунок 9

Правило трех сигм применяется в том случае, если есть уверенность в том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения.

Как видно из формулы (25), параметр t есть аргумент функции Лапласа. Задавшись разными значениями t, мы можем построить функцию *P=f(t)* (см. рис. 9, верхняя кривая).

Функция *P=f(t)* показывает, насколько σ_Q может отличаться отдельное значение результата измерения от своего среднего значения с вероятностью Р.

Измерительная информация

Любое измерение состоит в получении информации о размере измеряемой величины. Для того чтобы произвести измерение, необходимо представить себе объект измерения.

Информация, которой мы владеем для измерения, называется априорной. Обязательное применение априорной информации рассматривается как второй постулат метрологии.

Априорная информация о размере измеряемой величины может указать пределы, в которых лежит значение измеряемой величины, пусть даже очень грубо, ориентировочно.

Если мы не может сказать, что в этих пределах какие-то значения более вероятны, чем другие, то остается принять, что измеряемая величина может иметь любое значение от Q_1 до Q_2 с одинаковой вероятностью (рис. 10), т. е. воспользуемся ситуационной моделью:

$$P_0(Q) = \frac{1}{Q_2 - Q_1}.$$

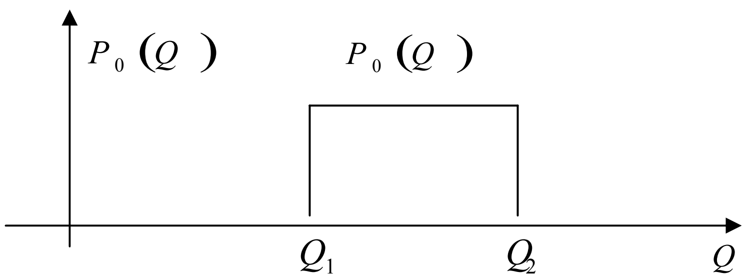


Рисунок 10

Дефицит информации о количественной характеристике измеряемой величины состоит в неопределенности ее значения на интервале Q_1 - Q_2.

Мерой этой неопределенности является энтропия:

$$H_0(Q) = -\int_{Q_1}^{Q_2} p_0(Q)\ln p_0 dQ \quad ;$$

$$H_0(Q) = -\int_{Q_1}^{Q_2} \frac{1}{Q_2 - Q_1}\ln\left(\frac{1}{Q_2 - Q_1}\right)dQ \quad .$$

Информация, которой мы владеем после измерения, называется апостериорной.

После измерения мы владеем информацией:

$$Q_1 = Q + \delta_1;$$

$$Q_2 = Q + \delta_2$$

.

.

.

$$Q_n = Q + \delta_n,$$

где Q значение измеряемой величины, а δ_i – случайные отклонения от значения измеряемой величины.

Среднее значение измеряемой величины равно:

$$\overline{Q_i} = \int_{-\infty}^{\infty} Q \cdot p(Q)dQ \quad .$$

Поскольку интегрировать в бесконечных пределах невозможно, то также невозможно установить и значение измеряемой величины. На практике исходят из того, что **никакое значение измеряемой величины с выбранной доверительной вероятностью не может отличаться от среднего значения больше чем на половину доверитель-**

ного интервала.

После выполнения измерения мы можем сказать, что значение измеряемой величины находится в пределах доверительного интервала Q_3 и Q_4 с заданной вероятностью (рис. 11).

Опять же мы не можем сказать относительно того, чему равно Q в пределах установленного интервала. Поэтому можно принять, что на этом интервале любые значения Q_i равновероятны, т. е. воспользуемся ситуационной моделью:

$$p(Q) = \frac{1}{Q_4 - Q_3}.$$

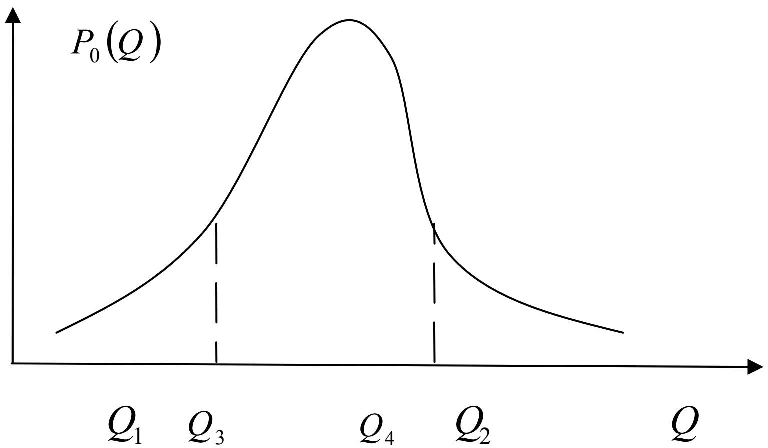


Рисунок 11

Тогда неопределенность:

$$H(Q) = -\int_{-3}^{4} \frac{1}{Q_4 - Q_3} \ln \frac{1}{Q_4 - Q_3} dQ = \ln(Q_4 - Q_3).$$

После измерении дефицит информации значении измеряемой величины уменьшится на:

$$\Delta H = H_0(Q) - H(Q) = \ln \frac{Q_2 - Q_1}{Q_4 - Q_3}$$

Величины ΔH интерпретируется как количество информации, получаемой в результате измерения, а величина доверительного интервала характеризует точность, с которой определено значение измеряемой величины. По ширине доверительного интервала измерения делятся на измерения высшей, высокой и низкой точности.

2.6 Однократное измерение

Однократным называется измерение проводимое один или более раз (не более 10). Подавляющее большинство измерений однократно. Простота, высокая производительность, низкая стоимость ставят однократное измерение вне конкуренции.

Результат однократного измерения описывается уравнением:

$$Q_i = X_i + \theta_i, \tag{26}$$

где X_i – отсчет;

θ_i – поправка.

Необходимым условием проведения однократного измерения является наличие априорной информации.

К априорной относятся:

1) информация о виде закона распределения вероятности показания и мере его рассеяния, которая извлекается из опыта предшествующих измерений;

2) информация о том, насколько значение измеряемой величины может отличаться от результата однократного измерения, которая может быть представлена классом точности прибора;

3) информация о значении аддитивной и мультипликативной поправки θ_i. Если значение поправки не известно, то оно учитывается ситуационной моделью, согласно которой значение поправки может быть любым с одинаковой вероятностью в пределах от $\theta_{i\min}$ до $\theta_{i\max}$.

Порядок действий при однократном измерений состоит из следующих этапов:

1. Анализ априорной информации, определение поправки θ_i.

2. Получение единственного значения отсчета по формуле уравнения измерений по шкале отношений:

$$\frac{Q + \upsilon}{[Q]} + \eta = x, \qquad (27)$$

где υ – масса тары;

η – слагаемое, учитывающее влияние множества случайных и неслучайных, аддитивных и мультипликативных факторов.

3. Перевод отсчета x_i в единственное значение показания:

$$X_i = x_i \cdot [Q]. \qquad (28)$$

4. Определение максимально возможного отклонения з результата однократного измерения Q_i от значения измеряемой величины Q ($\text{з} \approx$ классу точности СИ).

5. Определение пределов, в которых находится значение измеряемой величины:

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon .$$

В ходе анализа априорной информации всесторонне исследуется объект измерения, уточняется модель объекта измерения, определяются влияющие факторы и меры, направленные на уменьшение их влияния, значения поправки. На этом этапе также осуществляется выбор методов измерения, выбор средств измерений на основе изучения его метрологических характеристик. Важным итогом этой предварительной работы должна стать уверенность в том, что точность однократного измерения достаточна для решения поставленной задачи.

На основе анализа априорной информации осуществляется подготовка к выполнению измерения: установка и подготовка средств измерений к выполнению измерения, компенсация влияющих факторов, после чего выполняется основная измерительная процедура – получение одного значения отсчета.

Единственное значение отсчета x_i дает единственное значение показания X_i средства измерения, которое имеет ту же размерность, что и измеряемая величина. В это значение показания вносится поправка θ_i. Если значение поправки точно известно, то результат измерения Q будет представлен единственным значением:

$$Q_i = X_i + \theta_i .$$

Если значение поправки не известно, то при выбранной ситуационной модели, что он может быть любым в пределах от $\theta_{i\min}$ до $\theta_{i\max}$, результат однократного измерения Q_i с одинаковой вероятностью может быть любым в пределах от $X_i + \theta_{\min}$ до

$X_i + \theta_{max}$.

Проанализируем, как используется априорная информация.

Случай 1. Априорная информация состоит в том, что отсчет, следовательно, и показание подчиняются нормальному закону распределения вероятности со средним арифметическим отклонением σ_x и что значение аддитивной поправки равно θ_i.

В этом случае результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением $\sigma_Q = \sigma_x$, но смещенному по отношению к закону распределения вероятности показания на значения поправки θ_i. Задавшись доверительной вероятностью P, можно определить значение функции Лапласа:

$$p\{\overline{Q} - t\sigma_Q \le Q_i \le \overline{Q} + t\sigma_Q\} = 2F(t) - 1 = 2L(t),$$

где *t* является аргументом функции Лапласа.

По табличным значениям функции Лапласа можно определить ее аргумент *t*. Значит, задавшись доверительной вероятностью P по табличным значениям функции Лапласа, можно определить, насколько σ_Q результат однократного измерения Q_i может отличаться от среднего значения результата измерения $\overline{Q}$, равного значению измеряемой величины Q.

Обозначив половину доверительного интервала $t\sigma_Q$ через $\varepsilon = t\sigma_Q$, найдем с заданной вероятностью, что результат измерения лежит в пределах от $Q_i - \varepsilon$ до

$Q_i + \varepsilon$, т. е.

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon .$$

Случай 2. На основании априорной информации известно, что отсчет, а следовательно, показание подчиняются равномерному закону распределения вероятности (рис. 12) с размахом $2\varepsilon = x_{max} - x_{min}$, а также известно точное значение аддитивной поправки θ_i.

В этом случае результат измерения подчиняется тому же закону распределения вероятности, т.е. равномерному с тем же размахом, но смещенному по отношению к закону распределения вероятности показания на значение поправки З. Значение измеряемой величины Q, равное среднему значению результата измерения $\overline{Q}$, находится в пределах:

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon .$$

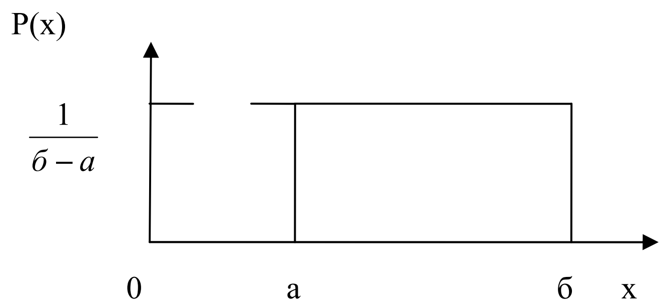


Рисунок 12

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad a \le x\\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a \le x \le b\\ 1 & при \quad x \ge b\end{cases}$$

Случай 3. Неизвестно какому закону распределения подчиняется отсчет, следовательно, и показание. Допустим, что среднее квадратическое отклонение равно σ_x. Известно точное значение аддитивной поправки θ_i.

В данном случае неизвестен закон распределения вероятности результата измерения, а известно лишь его среднее квадратическое отклонение $\sigma_Q = \sigma_x$.

Вероятность того, что при любом законе распределения вероятности результат однократного измерения окажется за пределами доверительного интервала, равна:

$$p\left\{\left|Q_i-\overline{Q}\right| \ge t\sigma_Q\right\}=\int_{-\infty}^{\overline{Q}-t\sigma_Q} p(Q)d(Q)+\int_{\overline{Q}+t\sigma_Q}^{\infty} p(Q)d(Q). \quad (29)$$

Введем в рассмотрение функцию, представленную на рис. 13:

$$\zeta(Q)=\begin{cases}1 & при \quad Q \le \overline{Q}-t\sigma_Q\\ 0 & при \quad \overline{Q}-t\sigma_Q \le Q \le \overline{Q}+t\sigma_Q\\ 1 & при \quad Q \ge \overline{Q}+t\sigma_Q\end{cases} \quad (30)$$

Формулу (30) можно записать следующим образом:

$$p\left\{\left|Q_i-\overline{Q}\right| \ge t\sigma_Q\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(Q)p(Q)d(Q). \quad (31)$$

Результат интегрирования не уменьшится, если

функцию $\zeta(Q)$ заменить квадратичной функцией: $\left(\dfrac{Q-\overline{Q}}{t\sigma_Q}\right)^2$, которая во всех Q не меньше $\zeta(Q)$.

Тогда вероятность того, что $\left|Q_i-\overline{Q}\right|$ окажется за пределами $t\sigma_Q$, равна:

$$p\left\{\left|Q_i-\overline{Q}\right| \ge t\sigma_Q\right\} \le \frac{1}{(t\sigma_Q)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Q-\overline{Q}\right)^2 p(Q)d(Q)=\frac{1}{t^2} \quad (32)$$

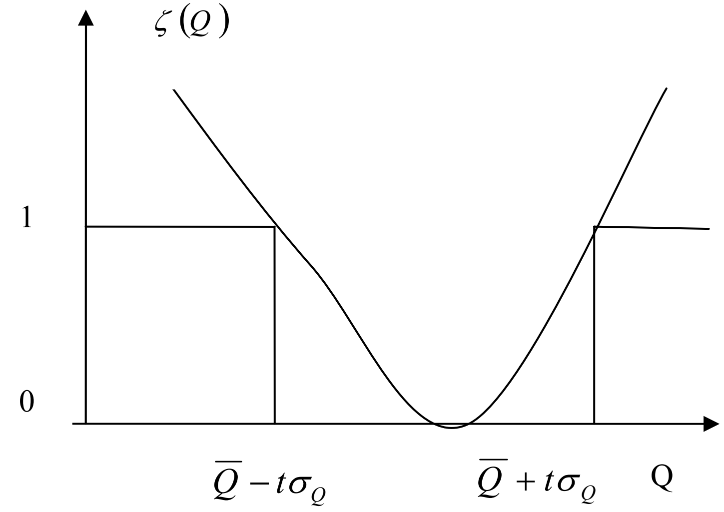


Рисунок 13

Следовательно, вероятность того, что результат однократного измерения Q_i не отличается от среднего значения при любом законе распределения не больше чем наполовину доверительного интервала, равна:

$$p\left\{\overline{Q}-t\sigma_Q \le Q_i \le \overline{Q}+t\sigma_Q\right\} \ge 1-\frac{1}{t^2}. \quad (33)$$

Эта формула носит название неравенства П.Л.

Чебышева. Она устанавливает нижнюю границу того, что ни при каком законе распределения вероятности случайное значение результата измерения не окажется за пределами доверительного интервала. Задавшись доверительной вероятностью P по табличным значениям неравенства Чебышева, можно определить значение параметра t и определить, насколько σ_Q – результат однократного измерения Q_i, может отличаться от среднего значения измеряемой величины, равного значению измеряемой величины при любом законе распределения вероятности.

Значение параметра t можно определить по нижней кривой на рис. 11.

Обозначив, как и ранее половину доверительного интервала через $\varepsilon = t\sigma_Q$, можно записать:

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon .$$

Случай 4. Априорная информация: класс точности СИ таков, что значение измеряемой величины не может отличаться от результата многократного измерения больше чем З; точное значение аддитивной поправки равно θ_i.

В этом случае значение измеряемой величины будет равно:

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon .$$

Случай 5. Априорная информация: отсчет, а следовательно, показание подчиняются нормальному закону распределения вероятности со средним квадратическим отклонением σ_x; значение аддитивной поправки находится в пределах от $\theta_{\min}$ до $\theta_{\max}$.

Здесь мы имеем случай, когда значение поправки неизвестно. Ситуационной моделью, учитывающей

неопределенность значения поправки, является равномерный закон распределения вероятности поправки на интервале от $\theta_{\min}$ до $\theta_{\max}$. Следовательно, можно говорить о том, что показание подчиняется нормальному закону распределения вероятности, а поправка – равномерному закону распределения вероятности. Значит, закон распределения результата измерения представляет собой композицию законов распределения показания и поправки.

В этом случае в соответствии с первой рекомендацией INS-1 «Выражение неопределенности результата измерений» МКМВ рекомендовано считать, что среднее значение композиции, в которую входит ситуационная модель, не подчиняющаяся вероятно-статистическим закономерностям, равное значению измеряемой величины, не отличается от результата многократного измерения больше чем на $\varepsilon = ku_Q$, где $u_Q = \sqrt{\sigma_x^2 + u_Q^2}$, а коэффициент к, аналогичный коэффициенту t, устанавливается по согласованию: к=2…3.

Представление результатов измерений. Измерительная информация должна быть представлена в форме, удобной для дальнейшей обработки. В связи со сказанным получение результата измерения является промежуточным этапом в проведении измерений.

Самая удобная форма представления результатов измерений для дальнейшей обработки – представление результата измерения с помощью числовых характеристик закона распределения вероятности.

При однократном измерении чаще всего используется такая числовая характеристика, как среднее квадратическое отклонение. С ее помощью определяются пределы, в которых находится значение измеряемой величины.

Если измерительная информация не предназначена для дальнейшей переработки, то она должна быть представлена в форме, удобной для восприятия человеком. Такой формой является указание пределов, в которых находится значение измеряемой величины:

$$Q_i - \varepsilon \le Q \le Q_i + \varepsilon \ .$$

При внесении точно известной поправки результат измерения может быть записан следующим образом:

$$Q_i + \theta - \varepsilon \le Q \le Q_i + \theta + \varepsilon \ .$$

Если точное значение поправки неизвестно, т. е. известно, что поправка лежит в пределах от $\theta_{\min}$ до $\theta_{\max}$, то имеем следующую ситуацию, представленную на рис. 14.

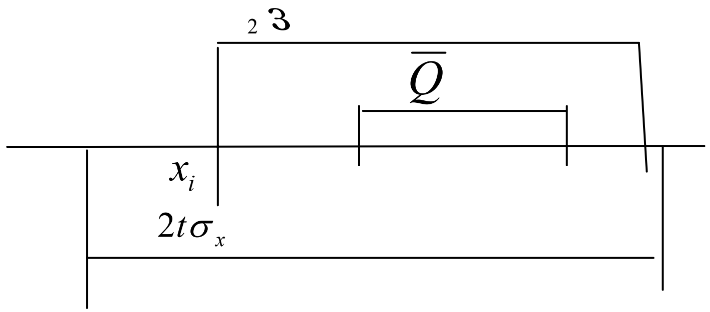


Рисунок 14

Следовательно, внесение поправки, точное значение которой неизвестно, с одной стороны, смещает интервал, в пределах которого находится значение измеряемой величины, а с другой – расширяет его.

Достоверность измерения

Достоверность измерения – степень доверия к результату измерения или же к тому, что значение измеряемой величины находится в пределах интервала.

В том случае, если результат измерения подчиняется

нормальному закону распределения вероятности, то мерой достоверности является доверительная вероятность.

Результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности при точно известной поправке. Точность результата измерения в этом случае равна точности показания, которая в свою очередь характеризует точность СИ.

Точность измерения – ширина интервала, в котором устанавливается значение измеряемой величины – зависит от выбранной доверительной вероятности Р.

Например, при Р=0,95

$$Q_i - 2\sigma_Q \le Q \le Q_i + 2\sigma_Q \ ,$$

при Р=0,99

$$Q_i - 2{,}6\sigma_Q \le Q \le Q_i + 2{,}6\sigma_Q \ ,$$

при Р=0,997

$$Q_i - 3\sigma_Q \le Q \le Q_i + 3\sigma_Q \ .$$

Если результат измерения описывается композицией закона распределения вероятности показания и ситуационной модели, учитывающей неточности поправки, то достоверность измерения определяется выбранным коэффициентом к.

2.7 Обработка результатов многократного измерения

Равноточные измерения

Равноточными называются измерения, выполняемые на одних и тех же приборах, одним и тем же оператором, в одних и тех же условиях.

Результат многократного измерения, так же как и результат однократного измерения, является случайным значением измеряемой величины, но его дисперсия в n раз меньше дисперсии однократного измерения.

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(Q_i\right) = \frac{n\sigma_Q^2}{n^2} = \frac{\sigma_Q^2}{n}. \quad (34)$$

Следовательно, точность значения измеряемой величины повышается в $\sqrt{n}$ раз.

При обработке результатов многократного измерения с равноточными значениями отсчета следует выполнять следующие операции:

1. Анализ априорной информации. Определение значения поправки θ_i.

2. Получение n независимых значений отсчета x_i по формуле: $\frac{Q + \upsilon}{[Q]} + \eta = x$.

3. Перевод всех значений отсчета x_i в значения показаний $X_i = x_i[Q]$.

4. Внесение поправок и получение n независимых результатов измерений:

$$Q_i = X_i + \theta_i.$$

5. Определение оценки среднего значения результата измерения $\overline{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i$.

6. Определение оценки среднего квадратического отклонения результата измерения:

$$S_Q = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \overline{Q}\right)^2}.$$

7. Исключение ошибок по правилу трех сигм:

$$\left|Q_i - \overline{Q}\right| \le 3\sigma_Q.$$

Если отклонение результата отдельного измерения от среднего арифметического значения больше, чем три сигма, то его считают ошибочным и его отбрасывают, после чего повторяют операции 5, 6, 7.

Если отклонение результата отдельного измерения от среднего арифметического значения меньше, чем три сигма, то проводится проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения.

8. Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения. Если массив экспериментальных данных n > 40…50, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится по критерию К Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{P_i}\left(\frac{m_i}{n} - P_i\right)^2.$$

Если массив экспериментальных данных n < 40…50, но больше 10…15, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится по составному критерию.

Если же n < 10…15, то проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения не проводится, а гипотеза о нормальности закона распределения вероятности (ЗРВ) результата измерения принимается или отвергается на основании априорной информации.

9. Определение стандартного отклонения среднего арифметического.

Если распределение вероятности подчиняется нормальному закону, то стандартное отклонение среднего арифметического определяется по формуле:

$$S_{\overline{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{n}}.$$

Если же распределение вероятности не подчиняется нормальному закону, то стандартное отклонение среднего арифметического определяется по формуле:

$$S_{\overline{Q}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i^2 - \overline{Q}_n^2\right)}.$$

10. Выбор доверительной вероятности Р и определение параметра t. Если распределение вероятности результата измерения подчиняется нормальному закону, то параметр t определяется по табличным значениям функции Лапласа при заданной доверительной вероятности. Если распределение вероятности результата измерения не подчиняется нормальному закону, то параметр t определяется по табличным значениям неравенства Чебышева (по нижней кривой, см. рис. 9).

11. Расчет половины доверительного интервала $\varepsilon = t\sigma_Q$.

13. Определение интервалов, в которых находится значение измеряемой величины:

$$\overline{Q}_n - \varepsilon \le Q \le \overline{Q}_n + \varepsilon .$$

2.8 Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения

Проверка нормальности закона распределения вероятности результата измерения проводится после исключения ошибок. Для проверки нормальности закона распределения вероятности результата измерения на основании экспериментальных данных строится гистограмма. Иногда по виду гистограммы можно с уверенностью заключить, что результата измерения подчиняется или не подчиняется нормальному ЗРВ. Например, если гистограмма имеет вид, показанный на рис. 15 а, то с уверенностью можно заключить, что результата измерения не подчиняется нормальному ЗРВ.

Если гистограмма имеет вид, показанный на рис. 15 б, то можно предположить, что результат измерения подчиняется нормальному ЗРВ.

Существует несколько критериев согласия, по которым проверяется гипотеза о соответствии экспериментальных данных тому или иному ЗРВ. Наибольшее распространение получил критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона).

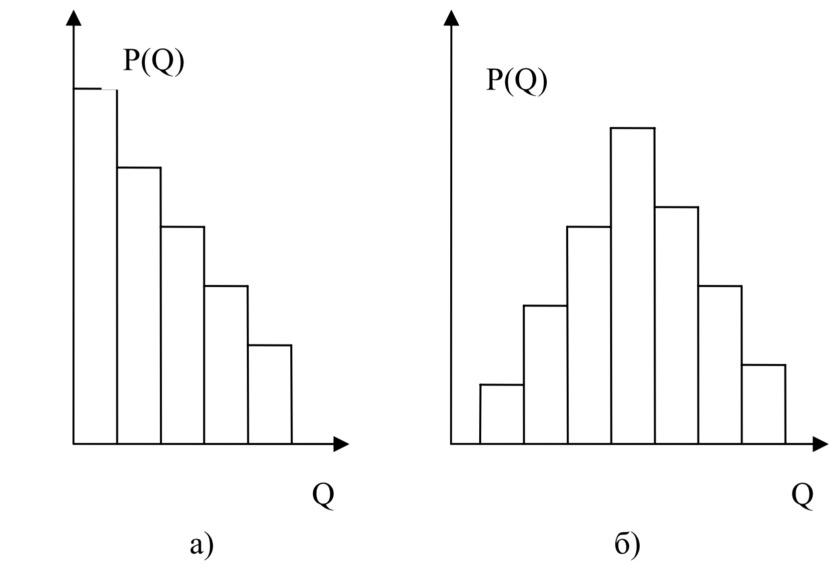


Рисунок 15

При проверке гипотезы о соответствии эмпирической функции распределения теоретическому осуществляются следующие операции:

1) строится ранжированный ряд результатов измерений;

2) определение частоты появления i–го результата измерений – m_i;

3) вся область изменений величины Q_i разбивается на k интервалов. Количество интервалов определяется по формуле:

$$k = 1 + 3{,}3 \cdot \lg n;$$

4) ширина интервала определяется по следующей формуле:

$$h = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{1 + 3{,}2 \lg n},$$

где n – объем выборки, количество измерений;

5) на основании выбранной теоретической функции $F(Q)$, в данном случае нормальный закон распределения вероятности, определяют вероятность попадания результата измерения в интервал Q_{i-1} ; Q_i :

$$p_i = P\{Q_{i-1} \le Q \le Q_i\} = \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} f(Q)dx = F(Q_i) - F(Q_{i-1});$$

6) умножая полученные вероятности p_i на n, получаем теоретические частоты np_i, т. е. частоты, которые следует ожидать в интервале (Q_{i-1} ; Q_i), если гипотеза верная;

7) определение меры расхождения эмпирического закона распределения от теоретического ЗРВ результата измерения:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{P_i}\left(\frac{m_i}{n} - P_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Если расхождение случайное, то χ^2 подчиняется χ^2 – распределению К. Пирсона.

Интегральная функция распределения вероятности К. Пирсона определяет вероятность того, что случайное число примет значение меньшее аргумента этой функции $\chi^2{}_0$. Поэтому, задавшись значением интегральной функции распределения F($\chi^2{}_0$), можно проверить, больше или

меньше его аргумента $\chi^2{}_0$ вычисленное значение χ^2.

При использовании критерия Пирсона возможны два рода ошибок. Ошибка первого рода состоит в отклонении верной гипотезы, а ошибка второго рода – в принятии неправильной гипотезы.

На рис. 16 представлены графики плотности распределения вероятности χ^2, когда проверяемая гипотеза верна (а) и когда неверна (б).

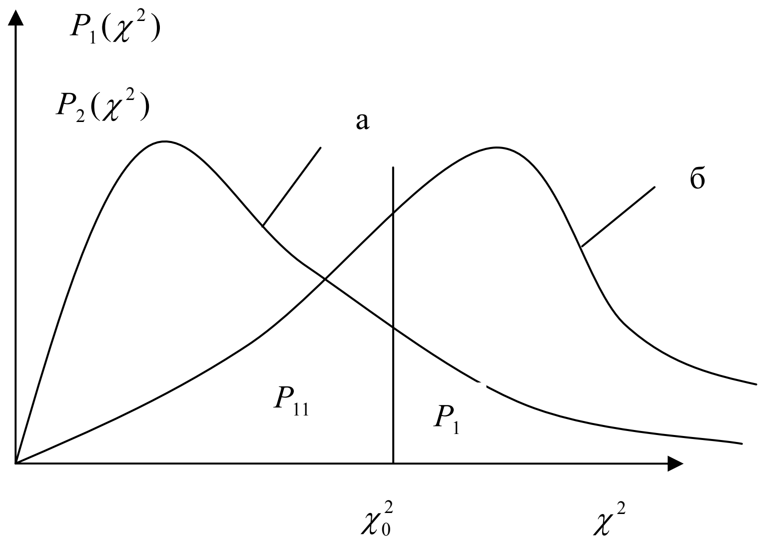


Рисунок 16
а) проверяемая гипотеза верна;
б) проверяемая гипотеза неверна.

Если вероятность, с которой принимается решение, соответствует значение $\chi^2{}_0$, то при всех $\chi^2 < \chi^2{}_0$ гипотеза будет приниматься, а при всех $\chi^2 > \chi^2{}_0$ – будет отвергаться. Вероятности ошибок первого и второго рода при этом будут равны:

$$p_1 = \int_{\chi_0^2}^{\infty} p_1(\chi^2)d\chi^2;$$

$$p_2 = \int_{\infty}^{\chi_0^2} p_2(\chi^2)d\chi^2.$$

Вероятности ошибок первого и второго рода зависят от значения χ^2, которая в свою очередь определяется вероятностью P=F(χ^2_0), с которой принимается решение. С повышением этой вероятности увеличивается χ^2_0, при этом вероятность ошибки первого рода уменьшается, а вероятность ошибки второго рода увеличивается. Обычно P принимают равной 0,9…0,95.

Составной критерий. При n< 10…15 для проверки нормальности закона распределения вероятности результата измерения применяется составной критерий.

При проверке по составному критерию выполняются следующие действия:

1) сначала рассчитывается величина

$$d = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Q_i - \overline{Q_n}\right|}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i - \overline{Q_n}\right)^2}};$$

2) проверяется условие $d_{\min} \le d \le d_{\max}$, где $d_{\min}$ и $d_{\max}$ зависят от вероятности, с которой принимается решение (табл. 5);

3) если это условие соблюдается, то проверяются «хвосты» теоретического и эмпирического законов распределения вероятности.

При 10 ≤ n ≤ 20 считается допустимым отклонение одного из независимых результатов значений результата измерения Q_i от среднего значения больше чем на

$2,5S_Q$, т.е. проверяем условие: $\left|Q_i - \overline{Q_n}\right| \le 2,5S_Q$.

При 20 ≤ n ≤ 50 допускается отклонение двух значений результата измерения от среднего значения больше чем $2,5S_Q$.

Таблица 5

n	P=0,90		P=0,95		P=0,99	
	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$d_{\min}$	$d_{\max}$
11	0,7409	0,8899	0,7153	0,9073	0,6675	0,9359
16	0,7452	0,8733	0,7236	0,8884	0,6829	0,9137
21	0,7495	0,8631	0,7304	0,8768	0,6950	0,9001
26	0,7530	0,8570	0,7360	0,8686	0,7040	0,8901
31	0,7559	0,8511	0,7404	0,8625	0,7110	0,8827
36	0,7583	0,8468	0,7440	0,8578	0,7167	0,8769
41	0,7604	0,8436	0,7470	0,8540	0,7216	0,8722
46	0,7621	0,8409	0,7496	0,8508	0,7256	0,8682
51	0,7636	0,8385	0,7518	0,8481	0,7291	0,8648

При соблюдении обоих условий, т. е.

$$\begin{cases} d_{\min} \le d \le d_{\max} \\ \left|Q_i - \overline{Q_n}\right| \le 2,5S_Q \end{cases}$$

гипотеза о нормальности закона распределения принимается. Если хотя бы один из условий не выполняется, то гипотеза отвергается.

2.9 Обработка результатов нескольких серий измерений

Если многократные измерения одной и той же величины производятся в несколько этапов, разными людьми, в разное время, в различных условиях, то получаем несколько серий измерений.

Серии называются однородными, если подчиняются одному и тому же закону распределения вероятности. В противном случае серии называются неоднородными.

При совместной обработке нескольких серий измерений проверка однородности является обязательной. При проверке однородности нескольких серий измерений сравниваются между собой средние арифметические и оценки дисперсии в каждой серии.

Если различие между средними арифметическими и между оценками дисперсии незначимо, то такие серии обрабатываются вместе.

При проверке однородности двух серий измерений выполняются следующие операции (рис. 17):

1) определяется среднее арифметическое в каждой серии: $\overline{Q}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} Q_i$ и $\overline{Q}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Q_i$;

2) определяется среднее квадратическое отклонение каждой серии:

$$S_{Q_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(Q_i - \overline{Q}_2\right)^2 ;$$

3) проводится проверка нормальности результата измерения в каждой серии;

4) если обе серии подчиняются нормальному закону распределения вероятности, то определяется среднее квадратическое отклонение обеих серий:

$$S_G = \sqrt{\frac{S_{Q_1}^2}{n_1} + \frac{S_{Q_2}^2}{n_2}} ;$$

5) определяется различие средних арифметических двух серий измерений:

$G = \overline{Q}_2 - \overline{Q}_1$;

6) выбирается доверительная вероятность Р, с которой принимается решение;

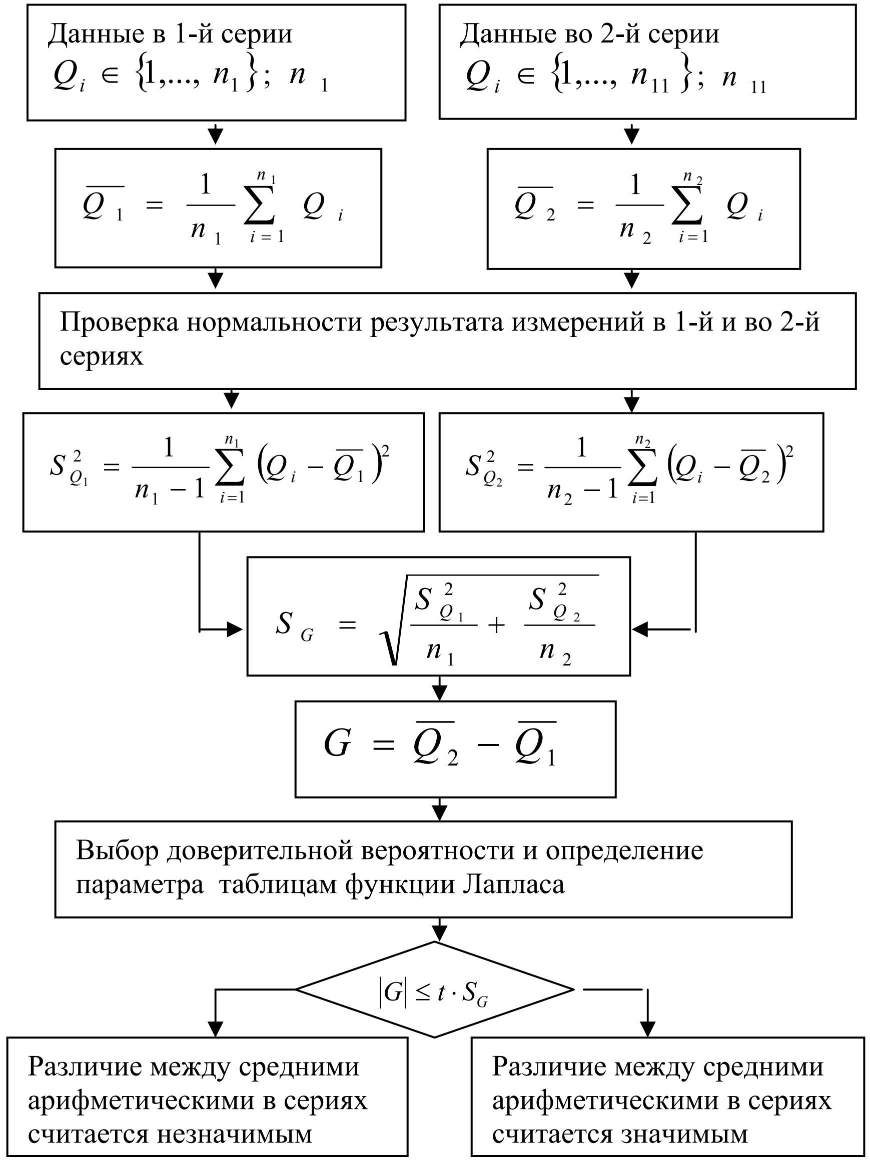


Рисунок 17 – Проверка различия между средними арифметическими в двух сериях измерений

7) определение параметра t по таблицам функции Лапласа (по верхней кривой) или по таблицам неравенства Чебышева (по нижней кривой, см. рис. 9), в зависимости от вида закона распределения вероятности;

8) определение ширины доверительного интервала: $t \cdot S_G$;

$$S^2_{Q_1} = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(Q_i - \overline{Q_1}\right)^2 \text{ и}$$

9) если $\left|G\right| \le t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими считается незначимым; если же $\left|G\right| > t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими – значимым.

При небольшом числе измерений в каждой серии (n < 40…50), если их средние арифметические подчиняются ЗРВ Стьюдента, то их разность можно считать, что уже подчиняется нормальному ЗРВ.

После проверки значимости различия между средними арифметическими проверяется различие между оценками дисперсии.

При проверке значимости различия между оценками дисперсии выполняются следующие операции (рис. 18):

1) определение среднего арифметического в каждой серии;

2) определение среднего квадратического отклонения каждой серии;

3) проверка нормальности ЗРВ результата измерения каждой серии;

4) определение величины ψ , равной отношению средних квадратических отклонений:

$$\psi = \frac{S^2_{Q_1}}{S^2_{Q_2}};$$

5) если ψ < 1, то в качестве ψ берут выражение:

$$\psi = \frac{S^2_{Q_2}}{S^2_{Q_1}}.$$

При $\psi > 1$, если это число случайное, то оно подчиняется закону распределения вероятности Р.А. Фишера. Поэтому, выбрав значение интегральной функции распределения Фишера, равным вероятности Р, с которым принимается решение, можно проверить больше или меньше ее аргумента ψ_0 вычисленное значение ψ . Если $\psi < \psi_0$, то различие оценок дисперсии в сериях можно считать незначимым.

Серии с незначимым различием оценок дисперсии называются равнорассеянными.

Если $\psi > \psi_0$, то гипотеза о равнорассеянности серии отвергается. Равнорассеянные серии с незначимым различием между средними арифметическими называются однородными.

Если в равнорассеянные серии входят экспериментальные данные, полученные в одних и тех же условиях, это говорит о сходимости серий измерений. То есть **под сходимостью понимается качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, полученных в одинаковых условиях.** Если в равнорассеянные серии входят экспериментальные данные, полученные в разных условиях, это говорит о воспроизводимости серий измерений. Значит, **под воспроизводимостью понимается качество результатов измерений, характеризующее близость друг к другу результатов измерений, полученных в разных условиях,**

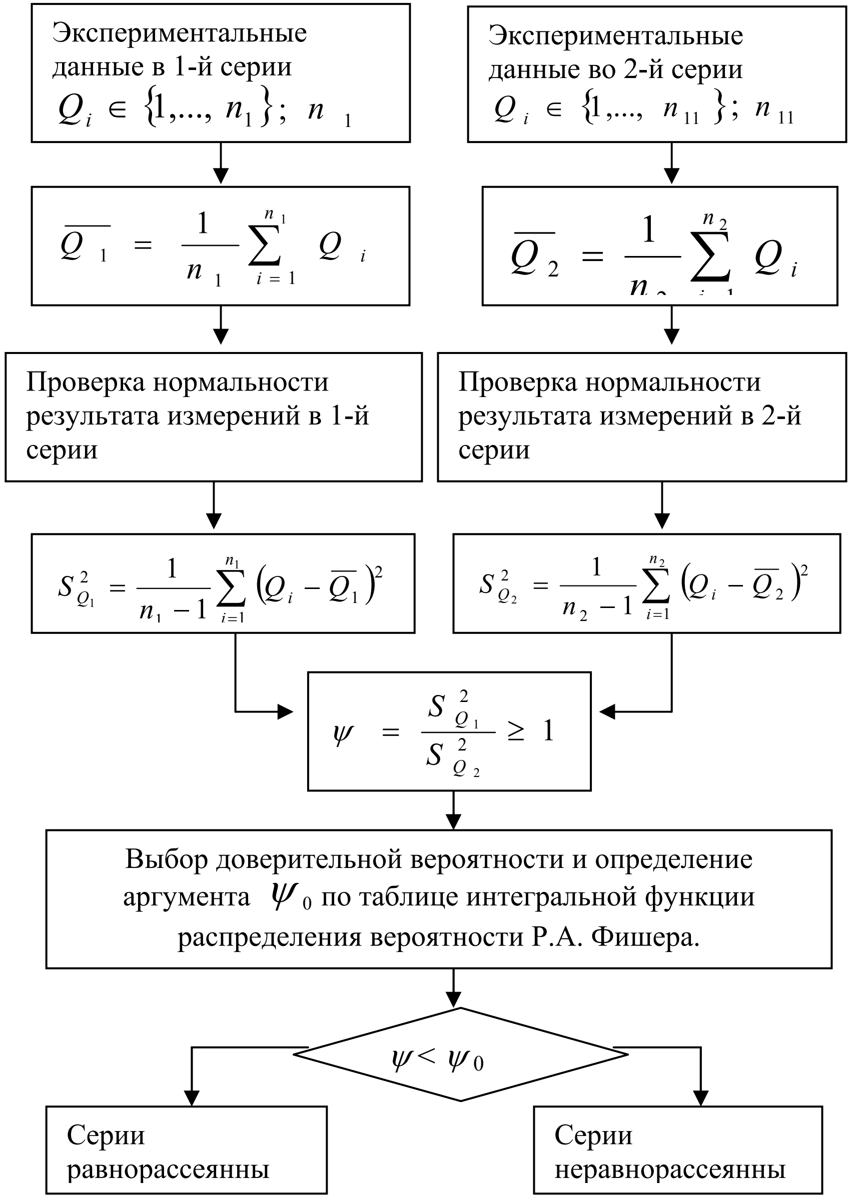


Рисунок 18 – Проверка равнорассеянности результатов измерений в двух сериях

в разное время, разными людьми и средствами.

Экспериментальные данные, входящие в однородные серии, рассматривают как единый массив.

При совместной обработке однородных серий среднее арифметическое можно вычислять по следующей формуле:

$$\overline{Q} = \frac{n_1 \cdot \overline{Q_1} + n_2 \cdot \overline{Q_2}}{N},$$

где $N = n_1 + n_2$.

А среднее квадратическое отклонение:

$$S_Q = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\left\{(n_1-1)S_{Q_1}^2 + (n_2-1)S_{Q_q}^2 + n_1\left(\overline{Q}_1 - \overline{Q}\right)^2 + n_2\left(\overline{Q}_2 - \overline{Q}\right)^2\right\}}$$

2.10 Обработка неравнорассеянных серий измерений

При обработке неравнорассеянных серий измерений с незначимым различием между средними арифметическими учитывается ценность информации, выполненной с особой точностью.

Более точными являются серии с малой дисперсией.

Для учета важности серий измерений, выполненных с большой точностью, при определении средних арифметических двух серий измерений включают средние каждой серии с «весами».

Вес каждой серии измерений определяется как величина обратно пропорциональная дисперсии:

$$g_1 = \frac{1}{S_{Q_1}^2}; \quad g_2 = \frac{1}{S_{Q_2}^2} \ldots.$$

Следовательно, среднее арифметическое неравнорассеянных серий измерений определяется как:

$$\overline{Q} = \frac{\frac{1}{S_{Q_1}^2}\cdot\overline{Q}_1 + \frac{1}{S_{Q_2}^2}\cdot\overline{Q}_2 + \ldots + \frac{1}{S_{Q_n}^2}\cdot\overline{Q}_n}{\frac{1}{S_{Q_1}^2} + \frac{1}{S_{Q_2}^2} + \ldots + \frac{1}{S_{Q_n}^2}} =$$

$$= \frac{g_1\overline{Q}_1 + g_2\overline{Q}_2 + \ldots + g_n\overline{Q}_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}.$$

То есть при обработке неравнорассеянных серий измерений определяется среднее арифметической взвешенное.

Стандартное отклонение неравнорассеянных серий равно:

$$S = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{S_j^2}}},$$

где l – количество серии;

S_j^2 – среднее квадратическое отклонение j–й серии.

Порядок обработки экспериментальных данных, входящих в неравнорассеянные серии с незначимым различием средних арифметических, состоит из следующих этапов (рис. 22):

1) получение l–й серии измерений;

2) определение среднего арифметического каждой серии измерений:

$$\overline{Q}_j = \frac{1}{m_j}\cdot\sum_{i=1}^{m_j} Q_{i,j},$$

где $\overline{Q}_j$ – среднее арифметическое j-й серии измерений;

m_j – число измерений в j-й серии измерений;

$Q_{i,j}$ – i-й результата в j-й серии измерений.

3) определение среднего квадратического отклонения

каждой серии измерений:

$$S_j^2 = \frac{1}{m_j(m_j - 1)}\cdot\sum_{i=1}^{m_j}\left(Q_{i,j} - \overline{Q}_j\right)^2;$$

4) определение стандартного отклонения:

$$S = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{S_j^2}}};$$

5) определение среднего арифметического взвешенного серии измерений:

$$\overline{Q} = \sum_{j=1}^{l}\frac{S^2}{S_j^2}\cdot\overline{Q}_j;$$

6) если число измерений во всех сериях меньше 50, то параметр t после выбора доверительной вероятности устанавливают по графику нижней кривой (см. рис. 11). Если же

$$\sum_{j=1}^{l} m_j \geq 50,$$

то параметр t определяется по таблицам функции Лапласа (верхняя кривая, см. рис. 11);

7) определение доверительного интервала:

$$\varepsilon = t\cdot S;$$

8) определение значения измеряемой величины:

$$\overline{Q} - \varepsilon \leq Q \leq \overline{Q} + \varepsilon.$$

2.11 Обеспечение требуемой точности измерений

Многократное измерение одной и той же величины постоянного размера позволяет обеспечить требуемую точность. Поскольку ширина доверительного интервала зависит от количества экспериментальных данных, то есть

$$\varepsilon = t\cdot S_{\overline{Q}},$$

Рисунок 19 – Обеспечение требуемой точности измерений

где $S_{\overline{Q}} = \dfrac{S_Q}{\sqrt{n}}$, то, увеличивая массив экспериментальных данных, можно добиться наперед заданного значения:

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 .$$

Алгоритм обработки экспериментальных данных при обеспечении единства измерений представлен на рис. 19.

3 СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Классификация средств измерений

Все технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические характеристики, называются средствами измерений. К ним относятся: меры, измерительные преобразователи, измерительные приборы, измерительные установки и измерительные системы.

Мерой называются средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера. Например, мерой массы является гиря, мерой электрического сопротивления – измерительный резистор, мерой емкостью – конденсатор и т. д.

Различают однозначные и многозначные меры, а также наборы мер.

Однозначной называется мера, воспроизводящая единицу физической величины одного размера. Примером однозначной меры являются: гиря, плоскопараллельная концевая мера длины, измерительная колба, нормальный элемент, измерительный резистор, конденсатор постоянной емкости.

Многозначной называется мера, воспроизводящая ряд одноименных величин различного размера, например, линейка, конденсатор переменной емкости, вариометр индуктивности. Сравнение с мерой осуществляют с помощью специальных технических средств – компараторов. Компараторами служат весы, измерительный мост. В качестве компаратора может выступать и человек.

Набор мер – специально подобранный комплект мер, применяемых не только по отдельности, но и в различных сочетаниях с целью воспроизведения ряда одноименных величин различного размера, например, наборы гирь, плоскопараллельных концевых мер длины, измерительных конденсаторов.

Измерительный преобразователь – средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию человеком. К ним относятся термопары, измерительные усилители, преобразователи давления и т. д. По месту занимаемой в измерительной цепи преобразователи делятся на первичные и промежуточные.

Первичный измерительный преобразователь – это измерительный преобразователь, к которому подведена измеряемая величина, т. е. первый в измерительной цепи, например, термопара в цепи термоэлектрического термометра, сужающие устройства расходомера.

Также различают передающий и масштабный измерительные преобразователи.

Передающий измерительный преобразователь – измерительный преобразователь предназначенной дистанционной передачи сигнала измерительной информации, например, индуктивный, пневматический передающие преобразователи.

Масштабный измерительный преобразователь – измерительный преобразователь, предназначенный для

изменения измеряемой величины в n раз, например, измерительный трансформатор тока, делитель напряжения, измерительный усилитель.

Конструктивно преобразователи являются либо отдельными блоками, либо составной частью СИ. Если преобразователи не входят в измерительную цепь и их метрологические характеристики не нормированы, то они не относятся к измерительным.

Измерительный прибор – средство измерения, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем. В отличие от меры измерительный прибор не воспроизводит значение физической величины. Измеряемая величина подводится к нему и воздействует на его первичный преобразователь. Измерительные приборы подразделяются на аналоговые, цифровые, показывающие, регистрирующие, самопишущие и печатающие.

Аналоговый измерительный прибор – измерительный прибор, показания которого являются непрерывной функцией изменения измеряемой величины.

Цифровой измерительный прибор – это измерительный прибор, автоматически вырабатывающий дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме.

Показывающий измерительный прибор – измерительный прибор, допускающий только отсчитывания показаний.

Регистрирующий измерительный прибор – измерительный прибор, в котором предусмотрена регистрация показаний.

Самопишущий измерительный прибор – измерительный прибор, в котором предусмотрена запись показаний в форме диаграммы.

Измерительные приборы также подразделяются на измерительные приборы прямого действия, измерительные приборы, интегрирующие и суммирующие измерительные приборы.

Измерительный прибор прямого действия – измерительный прибор, в котором предусмотрено одно или несколько преобразований сигнала измерительной информации в одном направлении, т. е. без применения обратной связи, например, амперметр, манометр, ртутный термометр.

Измерительный прибор сравнения – измерительный прибор, предназначенный для непосредственного сравнения измеряемой величины с величиной, значение которой известно, например, равноплечие весы, электроизмерительный потенциометр, фотометрическая скамья с фотометром, компаратор для линейных мер.

Интегрирующий измерительный прибор – измерительный прибор, в котором подводимая величина подвергается интегрированию по времени или по другой независимой переменной, например, электрический счетчик, планиметр.

Суммирующий измерительный прибор – измерительный прибор, показания которого связаны суммой двух или нескольких величин, подводимых к нему по разным каналам.

Измерительная установка – совокупность функционально объединенных СИ и вспомогательных устройств, предназначенных для выработки сигналов, удобных для непосредственного восприятия наблюдателем и расположенных в одном месте, например, установка для испытаний магнитных материалов.

Измерительная система – совокупность СИ и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами проводной и беспроводной связи,

предназначенных для выработки сигналов измерительной информации, в форме, удобной для автоматической обработки, передачи и использования, в автоматических системах управления.

3.2 Структурные элементы СИ

Принцип действия СИ – физический принцип, положенный в основу построения СИ данного типа.

Преобразовательный элемент СИ – элемент СИ, в котором происходит одно из ряда преобразований измеряемой величины.

Измерительная цепь средства измерения – совокупность преобразовательных элементов СИ, обеспечивающая осуществлением всех преобразований сигнала измерительной информации.

Чувствительный элемент СИ – часть первого в измерительной цепи преобразовательного элемента, находящегося под воздействие измеряемой величины.

Измерительный механизм – часть конструкции СИ, состоящая из элементов, взаимодействия которых вызывают их взаимное перемещение.

Отсчетное устройство – часть конструкции СИ, предназначенное для отсчитывания значений измеряемой величины.

Шкала СИ – часть отсчетного устройства, представляющее собой совокупность отметок.

Отметка шкалы – знак на шкале, соответствующий некоторому значению измеряемый величины. Он может быть в виде черты, точки, зубца.

Числовая отметка шкалы – число, соответствующее некоторому значению измеряемой величины.

Деление шкалы – промежуток между двумя отметками шкалы.

Длина деления шкалы – расстояние между осями двух соседних отметок шкалы, измеренное вдоль воображаемой линии, которая проходит через середину самых коротких отметок шкалы.

Равномерная шкала – шкала с делениями постоянной длины и с постоянной ценой деления.

Неравномерная шкала – шкала с делениями непостоянной длины, а в некоторых случаях и с непостоянной ценой деления.

Указатель – часть отсчетного устройства, положение которой относительно отметок шкалы определяет показание СИ.

3.3 Параметры и устройства СИ

Номинальное значение меры – значение величины, указанное на мере или приписанное ей.

Действительное значение меры – действительное значение, воспроизводимой мерой.

Цена деления шкалы – разность значения величины, соответствующая двум соседним отметкам шкалы.

Показания средств измерения – значение величины, определяемое по отсчетному устройству и выраженное в принятых единицах этой величины.

Градуированная характеристика СИ – зависимость между значениями величин на выходе и в ходе средства измерений, составленная в виде таблицы, графика или формулы.

Начальное значение шкалы – наименьшее значение измеряемой величины, указанное на шкале.

Конечное значение шкалы – наибольшее значение измеряемой величины, указанное на шкале.

Диапазон показаний – область значений шкалы, ограниченная конечным и начальным значениями шкалы.

Диапазон измерений – область значений измеряемой величины, для которой нормированы допускаемые погрешности СИ.

Предел измерений – наибольшее или наименьшее

значение диапазона измерений.

Входной сигнал СИ – сигнал, поступающий на вход СИ.

Выходной сигнал СИ – сигнал, поступающий на выходе СИ.

Влияющая физическая величина – физическая величина, не являющаяся измеряемой данным СИ, но оказывающая влияние на результаты измерений этим СИ.

Нормальное значение влияющей величины – значение (область значений) влияющей величины, устанавливаемое в стандартах или технических условиях на СИ данного вида в качестве нормального для этих СИ.

Рабочая область значений влияющей величины – область значений влияющей величины, устанавливаемая в стандартах или технических условиях на СИ данного вида, в переделах которой нормируется дополнительная погрешность этих СИ.

Нормальные условия применения СИ – условия применения СИ, при которых влияющие величины имеют нормальные значения или находятся в переделах нормальной области значений. Основная погрешность СИ определяется при нормальных условиях.

Рабочие условия применения СИ – условия применения СИ, при которых значение влияющих величин находится в пределах рабочих областей.

Коэффициент преобразования измерительного преобразователя – отношение на выходе измерительного преобразователя, отображающего измеряемую величину, к вызывающему его сигналу на выходе преобразователя.

Чувствительность измерительного прибора – отношение изменения сигнала на выходе измерительного прибора к вызывающему его изменению измеряемой величины.

Стабильность средств измерений – качество СИ, отражающее неизменность во времени его метрологических свойств.

3.4 Погрешности СИ

Абсолютная погрешность меры – разность между номинальным значением меры и истинным значением воспроизводимой его величины:

$$\Delta X = X_{ном} - X,$$

где $X_{ном}$ – номинальное значение меры;

X – значение, воспроизводимое мерой.

Относительная погрешность меры – отношение абсолютной погрешности меры к номинальному значению меры:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{ном}} \cdot 100\% .$$

Абсолютная погрешность СИ – разность между показательным прибором и действительным значением измеряемой величины. В качестве действительного значения измеряемой величины принимают показания эталонного средства измерения:

$$\Delta X = X_{п} - X_{эт}, \tag{35}$$

где $X_{п}$ – показание поверяемого средства измерения;

$X_{эт}$ – показание эталонного средства измерения.

Относительная погрешность СИ определяется как отношение абсолютной погрешности СИ к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{эт}} \cdot 100\%, \tag{36}$$

где ΔX – абсолютная погрешность СИ;

$X_{эт}$ – показание эталонного средства измерения.

Приведенная погрешность средств измерений – отношение погрешности измерительного прибора к нормирующему значению:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_{норм.}} \cdot 100\% , \tag{37}$$

где ΔX – абсолютная погрешность СИ;

$X_{норм}$ – некоторое нормирующее значение.

В качестве нормирующего значения могут быть приняты верхний, нижний пределы измерения, диапазон измерения, длина шкалы и т. д.

Также различают статистическую погрешность средств измерений, динамическую погрешность, погрешность средств измерений в динамическом режиме, систематическую погрешность средств измерений, случайную погрешность средств измерений, основную погрешность средств измерений, дополнительную погрешность средств измерений.

Статическая погрешность средств измерения – погрешность средства измерения, используемого для измерения постоянной величины.

Погрешность СИ в динамическом режиме – погрешность средства измерения, используемая для измерения переменной во времени величины.

Динамическая погрешность средств измерения – разность между погрешностью средства измерения в динамическом режиме и его статической погрешностью, соответствующей значению величины в данный момент времени.

Систематическая погрешность средств измерения – составляющая погрешности средства измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся во времени.

Случайная погрешность средств измерения – составляющая погрешности средства измерения, изменяющаяся случайным образом.

Основная погрешность – погрешность средства измерения, используемого в нормальных условиях.

Дополнительная погрешность меры – изменение погрешности меры вследствие изменения ее действительного значения, вызванного отклонением одной из влияющих величин от нормального значения или выходом за пределы нормальной области значений.

Предел допускаемой погрешности средства измерения – наибольшая погрешность средства измерения, при которой оно может быть признана годной к применению.

Точность средства измерения – качество СИ, отражающее близость к нулю его систематических погрешностей.

Правильность средства измерения – качество СИ, отражающее близость к нулю его систематических погрешностей.

Сходимость показания средства измерения – качество СИ, отражающее близость к нулю его случайных погрешностей.

Класс точности средства измерения – обобщенная характеристика СИ, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами СИ, влияющими на точность, значение которых устанавливают на отдельные виды СИ.

3.5 Классы точности СИ

Классом точности средств измерений называется обобщенная характеристика всех СИ данного типа, обеспечивающая правильность показаний и устанавливающая оценку снизу точности показаний.

Классы точности определяются пределами основных и дополнительных погрешностей СИ и устанавливаются в соответствии с ГОСТ 8.401-80 «Классы точности СИ общие требования».

Основной называется погрешность, соответствующая нормальным условиям применения СИ. Эти условия устанавливаются НТД на виды СИ или отдельные их типы. Установление условий применения и особенно нормальных условий применения является весьма важным для обеспечения единообразия метрологических характеристик средств измерений. В противном случае погрешности СИ одного и того же типа, отнесенные к различным внешним условиям, будут несопоставимы.

Для большинства средств измерений нормальными считаются следующие внешние условия:

– температура окружающей среды (293± 5) К*;*

– относительная влажность 65% ± 15%;

– атмосферное давление 101,3 *кПа* ± 4 *кПа (*750 *мм рт. ст.* ± 30 *мм рт. ст.);*

– напряжение питания 220 ± 2% (220 ± 10).

Кроме того, в технической документации на тип СИ указываются рабочие условия, в пределах которых допускается применение СИ с гарантированными метрологическими характеристиками.

Дополнительной погрешностью СИ называется погрешность, возникающая вследствие отклонения одной из влияющих величин от нормального значения.

Представление класса точности пределами основной абсолютной погрешности применяется преимущественно для мер массы и длины. В большинстве случаев классы точности И.П. выражаются пределами допускаемой основной приведенной или относительной погрешности. При этом основой для определения формы представления класса точности прибора является характер изменения основной абсолютной погрешности.

Если основная абсолютная погрешность имеет аддитивный характер, т.е. границы погрешностей измерительного прибора не изменяются в пределах диапазона измерении, то класс точности представляется пределами допускаемой приведенной погрешности:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta X}{X_N} \cdot 100\% = \pm \rho, \%, \qquad (38)$$

где ΔX – предел допускаемой основной абсолютной погрешности СИ;

ρ – отвлеченное положительное число, выбираемое из следующего ряда чисел: $1 \cdot 10^n$; $1{,}5 \cdot 10^n$; $2{,}5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$ (n = 1; 0; -1; -2 и т. д.);

X_N – некоторое нормирующее значение (диапазон измерений, верхний или нижний предел измерений или длина шкалы).

Если основная абсолютная погрешность имеет мультипликативный характер, т.е. границы погрешностей измеренного прибора линейно меняются в пределах диапазона измерений (рис. 20), то класс точности представляется пределами допускаемой относительной погрешности δ в виде:

$$\delta = \pm \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\% = \pm g, \%, \qquad (39)$$

где ΔX=*вх* – пределы допускаемой основной абсолютной погрешности прибора (в = tgλ);

X – показание прибора;

g – отвлеченное положительное число.

Если основная абсолютная погрешность СИ имеет аддитивные и мультипликативные составляющие, то класс точности представляется пределами допускаемой относительной погрешности δ в виде:

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{X} \cdot 100 \ \% = \pm \left[c + d \left(\frac{N_x}{X} \right) - 1 \right] \cdot 100 \ \% \qquad (40)$$

где Δ = *а* + *вх;*

с и d – отвлеченные положительные числа.

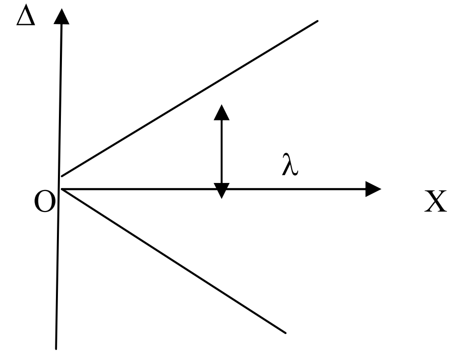


Рисунок 20

Обозначение классов точности наносится на циферблаты, щитки и корпуса СИ, приводится в НТД.

Обозначение классов точности может быть в виде заглавных букв латинского алфавита или римских цифр (I, II, III и т. д.).

Смысл таких обозначений раскрывается в НТД. Если класс точности обозначается арабскими цифрами, то этим устанавливают оценку снизу точности показание СИ.

Если класс точности обозначается арабскими цифрами, без каких либо условных знаков, то это означает, что класс точности представлен пределами допускаемой приведенной погрешности γ, и в качестве нормирующего значения X_N принимают или верхний или нижний пределы измерения.

Если класс точности обозначается арабскими цифрами с галочкой снизу, то это означает, что класс точности представлен пределами допускаемой приведенной погрешности и в качестве X_N принята длина шкалы.

Если класс точности обозначается арабскими цифрами в кружочке, то это означает, что класс точности представлен пределами допускаемой относительной погрешности по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\ \%.$$

Если класс точности обозначается арабскими цифрами в виде дроби 0,001/0,002, то это означает, что предел допускаемой относительной погрешности определяется по формуле (40).

Если класс точности обозначается прописными буквами латинского алфавита M, C и т.д., то это означает, что предел допускаемой абсолютной погрешности определяется по формуле: $\Delta = \pm a$ *или* $\Delta = \pm (a + вx)$.

Для средств измерений с равномерной или практически равномерной шкалой, если нулевое значение находится на краю или вне диапазона измерений, то обозначение класса точности арабскими цифрами без условных знаков означает, что значение измеряемой величины не отличается от того, что показывает указатель отсчетного устройства, более чем на соответствующее число процентов от верхнего предела измерений. Если нулевое значение находится внутри диапазона измерений, то это означает, что значение измеряемой величины не отличается от того, что показывает указатель отсчетного устройства, большее чем соответствующее классу точности число процентов от верхнего предела измерений.

Пример 1. Указатель отсчетного устройства амперметра класса точности 1,5 показывает 4А. Чему равна измеряемая сила тока? Диапазон показаний амперметра от 0 до 200 А.

Решение: $\gamma = \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\%$; $\gamma = 1{,}5$; $X_N = 200$ А

$$\Delta = \frac{1{,}5 \cdot 200A}{100\%} = 0{,}3A.$$

Следовательно, $4 - 0{,}3 < X < 4 + 0{,}3$

$3{,}97 < X < 4{,}3$

или же измеряемая сила тока I = 3,97 …….43.

Обозначение класса точности из ряда предпочтительных чисел (1; 1,5; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6) 10^n, где n = 0, -1, -2 и т. д., сопровождается применением дополнительных условных символов. Так, например, отметка снизу 0,5 означает, что у измерительных приборов данного типа с существенно неравномерной шкалой значение измеряемой величины не может отличаться от того, что показывает указатель отсчетного устройства, больше, чем указанное число процентов по всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений.

Заключение цифры в окружность 0,5 означает, что проценты исключаются непосредственно от того значения, что показывает указатель.

Обозначение класса точности в виде дроби (например, 0,001/0,002) означает, что измеряемая величина не может отличаться от значения X, показанного указателем больше чем на $\left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{X}\right| - 1\right)\right] \cdot 100\ \%$, где c и d – соответственно числитель в обозначение класса точности, а $X_к$ – больший по модулю из пределов измерений.

3.6 Метрологические характеристики СИ

Метрологическими характеристиками средств измерений называются характеристики свойств средств измерений, оказывающих влияние на результаты измерений и их точность. Их принято делить на следующие группы:

1. Характеристики, предназначенные для определения показаний СИ. К ним относится функция преобразования измерительного преобразователя, а также измерительного прибора с неименованной шкалой и со шкалой, отградуированной в единицах, отличных от единицы входной величины; значения однозначной и многозначной меры, цена деления шкалы измерительного прибора или многозначной меры; вид выходного кода, число разрядов кода, цена единицы наименьшего разряда кода СИ, предназначенных для выдачи результатов в цифровом коде.

В общем случае функция преобразования измерительного преобразователя или прибора может быть описана уравнением:

$$У=Ф(X),$$

где X – входной сигнал.

2. ***Характеристики качества показаний – точности и правильности***. Точность показаний СИ определяется характеристиками погрешности СИ. Рассмотрим характеристики погрешностей СИ. Для того чтобы определить систематическую погрешность нескольких десятков или сотен приборов данного типа, необходимо провести исследование нескольких или сотен приборов данного типа. Допустим, что при проведении исследования установлено следующее:

Номер измерения	$\Delta_{хс}$	$\Delta_{сл}$
1	0,5	0,1
2	0,6	0,2
3	0,55	0,3
.		
n	0,57	0,23

При этом систематичная погрешность для данного типа СИ рассматривается как случайная величина, т. е. систематическая погрешность множества средств измерений переходит в случайную.

Поэтому характеристиками систематической составляющей средств измерений являются математическое ожидание $M[\Delta_s]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[\Delta_s]$.

Характеристиками случайной составляющей погрешностей средств измерений являются:

– среднее квадратическое отклонение $\sigma[\Delta_s]$;

– нормализованная автокорреляционная функция $r(\tau)$ или функция спектральной плотности $S(\omega)$;

– случайная составляющая $\dot{\Delta}_н$ погрешности от гистерезиса (вариация Н выходного сигнала средства измерения).

Вариацией выходного сигнала называется погрешность СИ, представляющая собой разность показаний при измерении одного и того же значения измеряемой величины, сначала приближением к нему со стороны меньших значений, затем – больших значений.

3. Характеристики чувствительности СИ к влияющим величинам.

К ним относятся:

– функция влияния

– изменения значений метрологических характеристик СИ, вызванные изменениями влияющих величин.

4. Динамические характеристики СИ, учитывающие их инерционные свойства.

Различают полные динамические характеристики, которые исчерпывающим образом описывают инерционные свойства средства измерения, и частные динамические характеристики, которые отражают лишь некоторые инерционные свойства СИ

К полным динамическим характеристикам СИ относятся:

– уравнение динамики;

– передаточная функция;

– комплексный коэффициент преобразования (совокупность амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик).

К частным динамическим характеристикам относятся время установления показаний, ширина полосы пропускания.

5. ***Характеристики взаимодействия с объектами или устройствами на входе средств измерений***. К ним относятся входной и выходной импедансы (сопротивления) линейного измерительного преобразователя ($z_{вх}$ и $z_{вых}$).

Входным импедансом измерительного устройства называется характеристика измерительного преобразователя, определяющая реакцию входного сигнала на подключение измерительного устройства к источнику входного сигнала с фиксированным выходным импедансом.

Выходной импеданс измерительного преобразователя – характеристика измерительного преобразователя, определяющая реакцию его выходного сигнала на подключение к его выходу фиксированной нагрузки.

6. ***Неинформативные параметры выходного сигнала****,* обеспечивающие нормальную работу устройств, подключенных к средству измерений. Неинформативным параметром выходного сигнала СИ является параметр выходного сигнала, не связанный функционально с информативным параметром выходного сигнала для измерительного преобразователя или не являющийся выходной величиной для меры.

Информативный параметр входного сигнала – параметр входного сигнала, функционально связанный с измеряемым свойством (параметр входного сигнала, несущий информацию об измеряемой величине)

Метрологические характеристики СИ устанавливаются при метрологической аттестации СИ. Метрологической аттестацией средств измерений называется всестороннее

исследование средства измерений, выполняемое метрологическим органом для определения метрологических характеристик данного типа СИ.

3.7 Нормирование метрологических характеристик СИ (ГОСТ 8.009-84)

МХ, предназначенные для определения показаний СИ нормируют как номинальные характеристики СИ данного типа. Номинальные значения однозначной и многозначной меры (нормируют) представляют именованным числом. Номинальную функцию преобразования $f_H(x)$ измерительного преобразователя представляют в виде функции, графика или таблицы.

Для конкретных экземпляров СИ нормируют пределы, в которых должна находиться индивидуальная характеристика СИ при предусмотренных условиях применения СИ.

Характеристики качества показаний нормируют в виде пределов, в которых должна лежать поправка у всех средств измерений данного типа.

Характеристики систематической погрешности СИ нормируются в виде систематической погрешности или математического ожидания $M[\Delta_s]$ и среднего квадратического отклонения $\sigma[\Delta_s]$ систематической составляющей погрешности.

Характеристики случайной погрешности СИ нормируют в виде предела $\sigma_p\left(\overset{\&}{\Delta}\right)$ допускаемого среднего квадратического отклонения случайной составляющей погрешности или в виде номинально нормализованной автокорреляционной функции и предела допускаемого отклонения этой функции от номинальной.

Как было отмечено выше, если для множества СИ данного типа систематическая погрешность СИ переходит в случайную, то точность показаний СИ нормируется указанием предельно допустимого значения среднего квадратического отклонения погрешности СИ.

Нормированные метрологические характеристики второй группы представляются в виде пределов, либо одним числом, либо функцией (формулой, таблицей, графиком). Нормирование МХ второй группы производится как для нормальных, так и для рабочих условий применения СИ.

Характеристики чувствительности СИ к влияющим величинам нормируют для рабочих условий. В рабочих условиях изменение влияющих величин сказывается на точности и правильности показаний. Это учитывается функцией влияния. Для разных экземпляров СИ данного типа могут различать как вид функции влияний, так и их параметры. Однако для большинства СИ данного типа эти функции должны быть подобны и их параметры близки. Поэтому в качестве номинальных нормируют некоторые усредненные функции влияния с указанием их параметров, в также пределы допускаемых отклонений функции влияния у отдельных экземпляров СИ данного типа. Если функции влияния у отдельных экземпляров данного типа различаются значительно, то нормируют граничные функции влияния. В НД номинальная функция влияния, пределы допускаемых отклонений от нее и граничные функции влияния представляют в виде числа, формулы или таблицы.

Динамические характеристики СИ нормируют в виде номинальной динамической характеристики, пределов допускаемых отклонений от нее и граничных динамических характеристик.

3.8 Метрологическая надежность СИ

Под надежностью понимается свойство изделия

выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки. Основные термины, употребляемые в теории надежности, сформулированы в ГОСТ 13377-67 «Надежность в технике. Термины». Основным понятием в теории надежности является отказ.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособности.

Работоспособность – это состояние изделия, при котором оно способно выполнять заданные функции с параметрами, установленными требованиями технической документации.

Причинами отказов могут быть:

– неправильное проектирование или конструирование;

– неправильная разработка технологического процесса, его нарушение или ошибки в выборе и применении технологической оснастки;

– несоблюдение правил и режимов эксплуатации изделий, повышенные воздействия внешних факторов

По природе возникновения отказы можно разделить на две группы. К первой относятся отказы, возникающие в результате постепенного изменения одного или нескольких параметров. Необходимо отметить, что постепенные отказы поддаются прогнозированию и возникают в результате износа или старения изделий.

Вторую группу составляют внезапные отказы, которые происходят при скачкообразном изменении параметров изделия. По степени внешнего проявления отказы подразделяются на явные и неявные. Внезапные отказы вследствие их случайности невозможно прогнозировать.

Основными показателями, применяемыми для расчетов характеристик безотказности изделия, являются:

– вероятность безотказной работы;
– интенсивность отказов;
– средняя наработка до первого отказа;
– параметр потока отказов;
– наработка на отказ.

Вероятностью безотказной работы называется вероятность того, что в пределах определенного промежутка времени или объема работ не произойдет отказ. Он определяется соотношением:

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0}, \qquad (41)$$

где N_0 – количество изделий, работающих в начале промежутка времени;

$N(t)$ – количество исправных изделий в конце промежутка времени.

Интенсивностью отказов (**λ**) называют вероятность отказа неремонтируемого изделия в единицу времени, при условии, что отказ до этого не произошел. Она может быть определена по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{\Delta n}{N(t)\Delta t}, \qquad (42)$$

где Δn – число изделий, отказавших за время Δt;

$N(t)$ – количество исправных изделий в конце промежутка времени t.

Средней наработкой до первого отказа (T_{cp}) является среднее значение наработки изделий в партии до первого отказа. Она определяется выражением:

$$T_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n}, \qquad (43)$$

где T_i – время работы i-го изделия до первого отказа;

n – количество изделий в партии, для которой определяется T_{cp}.

Параметром потока отказов (Ω) называется среднее количество отказов ремонтируемого изделия в единицу времени, взятое для рассматриваемого момента времени. Он определяется по формуле:

$$\Omega = \frac{\Delta n}{N_0 \Delta t}, \qquad (44)$$

где N_0 – количество изделий, проработавших в промежутке времени t;

Δn – число изделий, отказавших за время Δt.

Следует учитывать, что при определении величины (Ω) изделия, отказавшие в течение времени t, ремонтируются. В этом случае

$$N_0 = N(t).$$

Наработкой на отказ (T) называется среднее значение наработки на отказ ремонтируемого изделия между отказами:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{cpi}}{n}, \qquad (45)$$

где T_{cpi} – среднее значение наработки на отказ i-го изделия;

n – число изделий в исследуемой партии.

Значение T_{cpi} находятся по формуле:

$$T_{cpi} = \frac{\sum_{j=1}^{m} T_{ij}}{m}, \qquad (46)$$

где T_{ij} – среднее время исправной работы *i*-го изделия между *j*-первым и *(j+1)*-м отказами;

m – число отказов *i*-го изделия.

Для характеристики безотказности как ремонтируемых, так и неремонтируемых изделий используют показатель, называемый условной средней наработкой до первого отказа T^*_{cp}.

Условной средней наработкой до первого отказа называют среднюю наработку на отказ при условии, что изделие, выполнившее заданный объем работы (ресурс) или проработавшее заданный срок службы, заменяется новым.

Пример 1. При испытаниях приборов в начале промежутка времени работало 1000 приборов. По истечении времени t=240 часов отказало 50 приборов. Определить вероятность безотказной работы приборов.

Решение.

1. Количество исправных приборов в конце промежутка времени равно:

N(t)=1000-50=950.

2. Вероятность безотказной работы приборов:

$$P(t) = \frac{950}{1000} = 0{,}95.$$

Пример 2. После некоторого промежутка времени работы изделий исправными были 1000 изделий и за время Δt =100 ч вышли из строя 65 изделий. Определить интенсивность отказов.

Решение. Интенсивность отказов в этом случае будет равна:

$$\lambda = \frac{65}{1000 \cdot 100} = 6{,}5 \cdot 10^{-4}\, ч^{-1}.$$

Интенсивность отказов, определяемая по формуле (42), определяется экспериментально в процессе испытания прибора на надежность, что требует много времени. На практике интенсивность отказов можно прогнозировать. Для большинства серийно выпускаемых электрических и радиотехнических элементов средств измерений (транзисторы, резисторов, конденсаторов и т. п.) имеются специальные таблицы, в котором указывается интенсивность их отказов в единицу времени.

Зная интенсивность отказов каждого элемента λ_i, можно определить интенсивность отказов средств измерений, состоящих из этих элементов:

$$\lambda_{\sum} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot m_i, \qquad (47)$$

где n – количество типов элементов, входящих в состав средств измерений;

m_i – количество элементов i–го типа.

Вероятность безотказной работы средств измерений в этом случае определяется по следующей формуле:

$$P(t) = e^{\int_0^n \lambda_{\sum}(t)dt}. \qquad (48)$$

Среднее время безотказной работы, называемое выработкой на отказ, будет равно:

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t)dt. \qquad (49)$$

Интенсивность отказов $\lambda_{\sum}$, вероятность безотказной работы $P(t)$ и наработка на отказ T_{cp} являются наиболее часто применяемыми показателями надежности средств измерений.

Так как случайный отказ может произойти в любой момент времени, независимо от того, сколько проработало СИ, то интенсивность внезапных отказов не зависит от времени, т. е.

$$\lambda_{\sum}(t) = \lambda_{\sum} = const.$$

Поэтому когда речь идет о внезапных отказах, то вероятность безотказной работы СИ определяется более простым выражением:

$$P(t) = e^{-\lambda_{\sum} \cdot t}.$$

Наработка на отказ определяется по формуле:

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda_{\sum}}.$$

По характеру своего проявления внезапные отказы являются явными и их легко обнаружить. Сложнее обстоит дело с диагностикой постепенных отказов, возникающих в результате постепенного изменения одного или нескольких параметров. Такие отказы называются скрытыми и могут быть обнаружены при поверке средств измерений. Поэтому межповерочные интервалы устанавливают, исходя из требований обеспечения метрологической надежности СИ.

Метрологической надежностью называется свойство средств измерений сохранять установленные значения метрологических характеристик в течение определенного промежутка времени при нормальных режимах и рабочих условиях эксплуатации.

Метрологическим отказом называется выход метрологических характеристик средств измерений за пределы норм. Метрологическая надежность средств измерений устанавливается экспериментально, в ходе испытания

средств измерений на метрологическую надежность. Для испытания отбираются n средств измерений данного типа. У каждого конкретного экземпляра средств измерений определяются индивидуальные значения метрологических характеристик, затем – законы распределения вероятности значений и его числовые характеристики. Для большинства СИ законы распределения вероятности исследуемой метрологических характеристик оказываются нормальными. Оценка среднего значения ее равна:

$$\overline{Q_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Q_i,$$

а оценка дисперсии:

$$S_{Q_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(Q_i - \overline{Q}_1\right)^2.$$

При правильном нормировании среднее арифметическое должно совпадать с номинальным значением этой метрологической характеристики, а максимальные и минимальные пределы, в которых должна находиться индивидуальная метрологическая характеристика любых средств измерений данного типа, устанавливаются симметрично номинальному значению.

На практике часто пользуются упрощенной методикой. Межповерочный интервал определяют по формуле:

$$T_{мп} = \frac{\ln(1 - P_{м.отк.})}{\ln P_м(t)},$$

где $P_м(t)$ – вероятность безотказной работы в метрологическом смысле работы;

$P_{м.отк.}$ – вероятность метрологического отказа за время между поверками, выбираемая из следующих установок:

Для средств измерений, используемых	Значение допустимой вероятности метрологического отказа
при технических измерениях	0,2…0,1
при передаче информации о размере единиц	0,15…0,005
при особо важных, ответственных измерениях	

В процессе эксплуатации может производиться корректировка межповерочного интервала. Его расчет производится согласно МИ.

3.9 Передача информации о размере единицы от эталона рабочим средствам измерений

Эталоны создаются для воспроизведения и хранения единиц физических величин и передачи их размера средствам измерений, применяемым в стране с целью обеспечения единства измерений.

Эталоны по подчиненности подразделяются на первичные (исходные) и вторичные (подчиненные). Первичные эталоны могут иметь разновидность специальные первичные эталоны.

Первичные эталоны воспроизводят и хранят единицу величины и передают их размеры с наибольшей точностью, достигнутой в данной области измерения.

Специальные эталоны воспроизводят единицы в условиях, когда прямая передача размера единицы от первичного эталона с требуемой точностью технически неосуществима (высокие и сверхвысокие частоты, малые и большие энергии, давление или температуры, особые состояния вещества и т. п.).

Первичные и специальные эталоны являются исходными для страны, и им присваивают наименования «Государственный первичный эталон» и «Государственный специальный эталон».

К вторичным относят эталоны-копии, эталон сравнения и рабочие эталоны. Эталоны-копии предназначены для передачи размера единицы рабочим эталонам; эталоны сравнения – для взаимного сличения эталонов, которые по тем или иным причинам нельзя непосредственно сличать друг с другом; рабочие эталоны – для поверки наиболее точных рабочих средств измерений.

По количеству входящих в состав эталона средств измерений эталоны подразделяются на одиночные и групповые, а также на эталонные наборы.

Одиночный эталон состоит из одного средства измерения или одной измерительной установки, обеспечивающих воспроизведение и хранение самостоятельно, без участия других средств того же типа.

Групповой эталон – совокупность однотипных средств измерений, применяемых как одно целое для повышения точности его метрологической надежности. Групповые эталоны создаются как постоянного, так и переменного состава. В групповые эталоны переменного состава входят средства измерений, периодически заменяемые новыми.

Эталонный набор представляет собой набор средств измерений, позволяющих хранить и измерять единицу величины в определенном диапазоне, в котором отдельные средства измерений имеют различные номинальные значения и диапазоны измерений.

Государственные эталоны создает, утверждает, хранит и применяет Госстандарт.

В состав государственных эталонов включают средства измерений, при помощи которых:

– хранят и воспроизводят единицу;

– контролируют условия измерений, неизменность воспроизводимого и хранимого размера единицы;

– осуществляют передачу размера единицы.

Вторичные эталоны создают, хранят и применяют министерства (ведомства), а утверждают – центры эталонов.

В состав вторичных центров включают средства измерений, при помощи которых хранят и контролируют условия хранения, передают размер единицы. Государственные эталоны подлежат международным сличениям. Для наблюдения за правильным хранением, сличением и исследованием эталонов назначаются ученые-хранители эталонов. Ученых-хранителей государственных эталонов утверждает Госстандарт по представлению директоров центров эталонов из числа ведущих специалистов-метрологов в данной области.

Классификация, назначение и общие требования к созданию, хранению и применению эталонов установлены в ГОСТ 8.057-80 «Эталоны единиц физических величин. Основные положения». Порядок разработки, утверждения, регистрации, хранении и применения установлены в ГОСТ 8.372-80.

Технической основой обеспечения единства измерений являются:

– воспроизведение единиц физических величин;

– передача информации о размере единицы от эталонов рабочим средствам измерений;

– метрологическая аттестация и поверка средств измерений.

Различают централизованное и децентрализованное воспроизведения единиц. При централизованном воспроизведении единица физической величины воспроизводится государственным эталоном. Информация о размере единицы физической величины передается всем средствам измерений в стране. При децентрализованном воспроизведении единица физической величины воспроизводится там, где

выполняются измерения.

Схемы передачи информации о размерах единиц при их централизованном воспроизведении называют поверочными.

Поверочная схема – это утвержденный в установленном порядке документ, регламентирующий средства, методы и точность передачи размера единицы физической величины от государственного эталона рабочим средствам измерений.

Поверочные схемы в зависимости от области распространения подразделяются на следующие виды:

– государственные;

– ведомственные;

– локальные схемы.

Государственная поверочная схема распространяется на все средства измерений данной физической величины, применяемые в стране, т. е. устанавливают порядок передачи информации о размере единицы в масштабе страны.

Государственные поверочные схемы разрабатываются метрологическими институтами. Они возглавляются первичными и специальными эталонами.

Ведомственная поверочная схема распространяется на средства измерений, подлежащие поверке внутри ведомства. Ведомственные поверочные схемы согласовываются с главным центром государственных эталонов и утверждаются руководством ведомства.

Локальная поверочная схема распространяется на средства измерений, подлежащие поверке в данном органе государственной метрологической службы или в органе метрологической службы юридического лица. Локальная схема разрабатывается метрологической службой юридического лица и согласовывается с территориальным органом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии (ФАпоТРиМ).

Содержание и построение поверочных схем устанавливает ГОСТ 8.061-80.

Схема передачи информации о размере единицы представлена на рис. 21.

Содержание и построение поверочных схем установлены ГОСТ 8.061-80 «Поверочные схемы. Содержание и построение».

На чертеже поверочной схемы указываются:

– наименования СИ и методов поверки;

– номинальные значения или диапазон значений физических величин;

– допускаемые значения погрешностей СИ;

– допускаемые значения погрешностей методов поверки.

Чертеж поверочной схемы состоит из полей, расположенных друг над другом и разделенных штриховыми линиями. Поля должны иметь наименование: «Государственный эталон», или «Эталон» (вторичный эталон); «Рабочие эталоны», «Рабочие СИ».

3.10 Методы передачи размера единицы физической величины

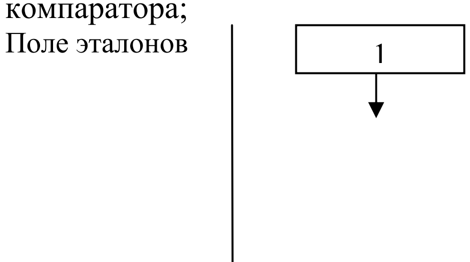
К основным методам поверки средств измерений относятся:

– непосредственное сличение рабочих СИ с эталонным средством измерения или меры с эталонной мерой;

– измерение эталонным средством измерения величины, воспроизводимой поверяемой мерой;

– прямое измерение поверяемым средством измерения величины, воспроизводимой эталонной мерой (однозначной или многозначной);

– сличение эталонной и поверяемой мер с помощью компаратора;



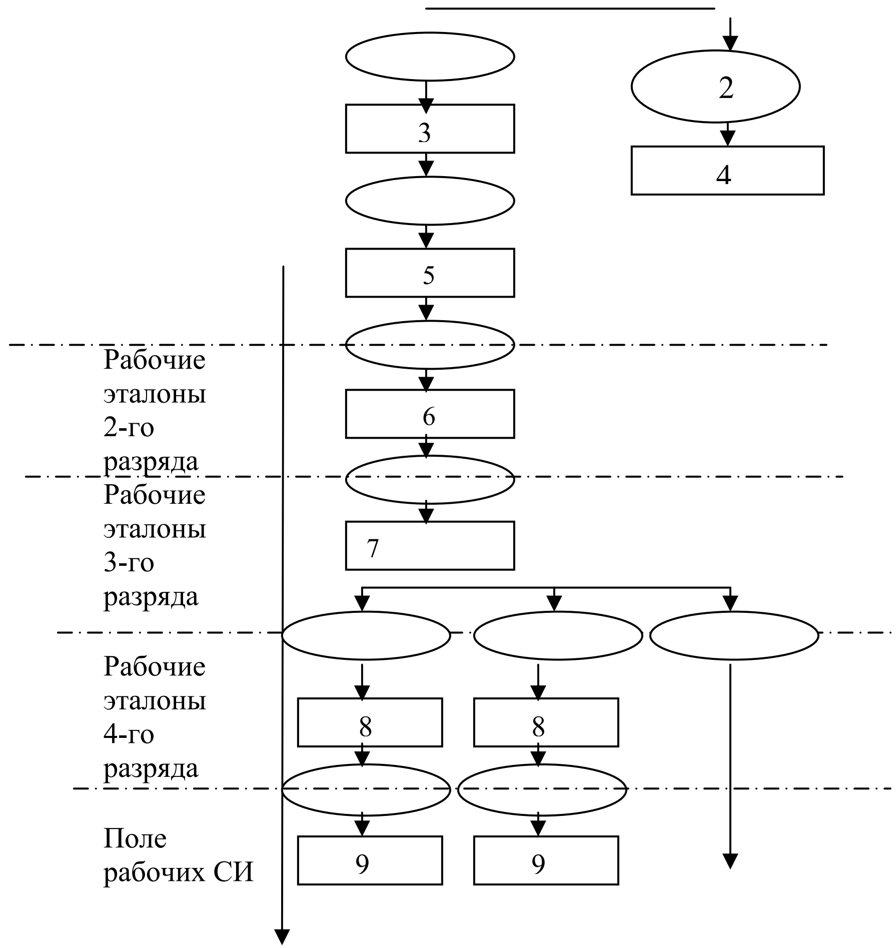


Рисунок 21 – Схема передачи информации о размере единицы

1 – государственный эталон; 2 – метод передачи размера единицы; 3 – эталон-копия; 4 – эталон сравнения (для международных сличений); 5 – рабочий эталон; 6–8 – рабочие эталоны 1, 2 и 3-го разрядов, 9 – рабочие СИ

– поверка с применением косвенных измерений.

Метод непосредственного сличения поверяемого средства измерения с эталонным средством – наиболее распространенный метод поверки в области электрических и магнитных измерений.

Основой метода является проведение одновременных измерений одного и того же значения физической величины поверяемым и эталонным средством измерения. Структурная схема поверки методом непосредственного сличения представлена на рис. 22.

При поверке с помощью данного метода устанавливают некоторое значение величины X и сравнивают результаты измерения этой величины эталонным средством измерения $X_э$ и поверяемым средством измерения $X_п$.

Абсолютная погрешность поверяемого средства измерения будет определяться как

$$\Delta X = X_э - X_п.$$

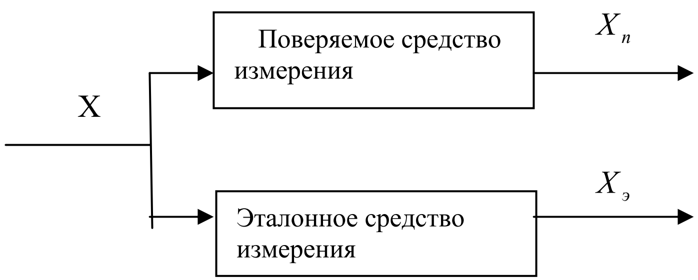


Рисунок 22 – Схема поверки методом непосредственного сличения

Метод непосредственного сличения может осуществляться двумя способами.

При поверке первым способом указатель отсчетного устройства совмещают с поверяемой отметкой шкалы путем изменения входного сигнала, а погрешность средства

измерения определяется как разность между показанием поверяемого средства измерения и эталонного. При этом показание эталонного средства измерения принимается за действительное значение измеряемой величины.

При поверке вторым способом номинальное значение физической величины устанавливается по эталонному средству измерения, а погрешность определяют как разность между показанием эталонного и поверяемого средств измерения.

Первый способ удобен тем, что погрешность определяется по эталонному прибору, шкала которого обычно имеет большее число делений, что уменьшает погрешность отсчета вследствие параллакса.

Второй способ позволяет одновременно поверять несколько средств измерений с помощью одного эталона, и он удобен при автоматической поверке.

Основным достоинством метода непосредственных сличений является простота, наглядность, возможность применения автоматической поверки.

Измерение эталонным средством измерения величины, воспроизводимой поверяемой мерой, широко применяется при поверке мер массы, мер сопротивления и т.п.

Прямое измерение поверяемым средством измерения величины, воспроизводимой эталонной мерой (однозначной или многозначной), применяется в случае, когда имеется возможность с помощью однозначной или многозначной меры произвести сличение и определить погрешность измерения поверяемого прибора в пределах измерений.

Сличение эталонной и поверяемой мер с помощью компаратора выполняют путем введения в схему поверки некоторого промежуточного звена – компаратора, позволяющего сравнивать две однородные величины. Например, при сличений мер индуктивности, емкости в качестве компаратора используют мосты постоянного и переменного тока, при сличении мер сопротивления и ЭДС – потенциометры, а при сличении мер массы – весы.

Сличение мер с помощью компаратора может осуществляться методами противопоставления или замещения. Общим для этих методов является выработка сигнала о наличии разности измеряемых величин.

Также различают нулевой метод, когда путем подбора эталонных мер показание компаратора сводят к нулю.

Поверка с применением косвенных измерений позволяет находить размер меры с помощью поверяемого средства измерения прямыми измерениями нескольких эталонных величин, связанных с искомой величиной определенной зависимостью. Метод применяется в том случае, когда действительные значения величин, воспроизводимые эталонными и поверяемыми средствами, невозможно определить прямыми измерениями или когда косвенные измерения просты или более точны по сравнению с прямыми измерениями.

3.11 Режимы работы СИ

3.11.1 Установившийся режим работы СИ

Указатель отсчетного устройства останавливается на одной из отметок шкалы спустя некоторое время t_y после начала измерения физической величины. У показывающих измерительных приборов это время называется временем установления показаний, а режим работы средств измерений после установления показания – установившимся. У измерительных преобразователей реакция на входное воздействие называется откликом, или выходным сигналом. Это может быть изменение угла поворота стрелки у показывающих измерительных приборов, изменение длины столба термометрической жидкости у термометров, перемещение указателя у

поплавковых уровнемеров. Время установления выходного сигнала у измерительных преобразователей называется временем реакции СИ.

Зависимость между входным воздействием и откликом на него измерительного преобразователя, а также измерительного прибора неименованной шкалой или со шкалой, отградуированной в единицах, отличных от единиц входной величины, называется функцией преобразования. В установившемся режиме функция преобразования представляет собой линейное или не линейное алгебраическое уравнение статики.

Рассмотрим установившийся режим работы ртутного термометра (рис. 23).

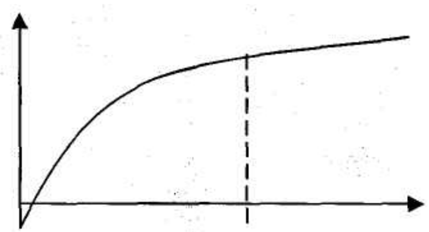


Рисунок 23

Функция преобразования, принимаемая для всех СИ данного типа, называется номинальной, а функция преобразования конкретного экземпляра СИ данного типа – индивидуальной функцией преобразования. Поэтому иногда в НД нормируют пределы, в которых находится их индивидуальная функция преобразования. Линейную функцию преобразования, проходящую через начало координат, допускается представлять коэффициентом преобразования в виде числа. В этом случае нормируются пределы, в которых находиться его значение.

Приметы линейных и нелинейных функций преобразований в установившемся режиме представлены на рис. 24.

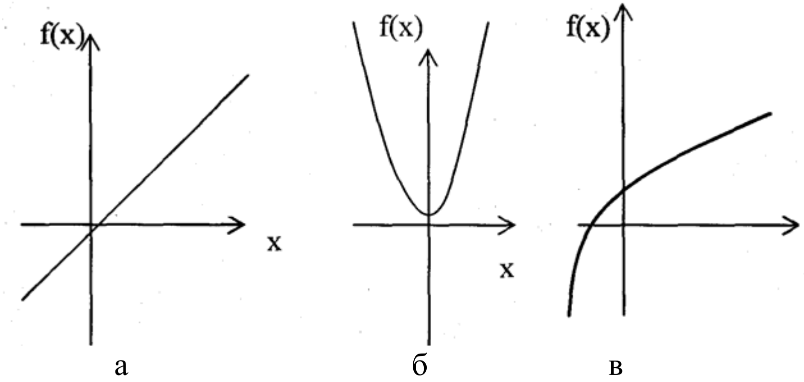


Рисунок 24 - Линейная (а), нелинейная (квадратичная (б) и логарифмическая (в) функции преобразования в установившемся режиме

Сведения о функции преобразования, содержащиеся в НТД, предназначены для использования в случаях, когда к точности измерений высокие требования не предъявляются.

Процедура экспериментального определения функции преобразования в установившемся режиме называется градуировкой.

При градуировке средств измерений находится зависимость между известным входным воздействием и откликом на них в установившемся режиме.

Различают градуировку в отдельных точках диапазона измерений и построение градуировочной характеристики.

При градуировке в отдельных точках измерений функция преобразования представлена в виде таблицы. При построении градуировочной характеристики функция преобразования аппроксимируется аналитическим выражением.

Градуировка в отдельных точках диапазона

измерений. В качестве примера рассмотрим градуировку ртутного термометра в двух реперных точках (при температуре таяния льда и температуре кипения воды). При этом проводится n измерений длины ртутного столба при температуре таяния льда и при температуре кипения воды. Затем оба массива экспериментальных данных обрабатывают, в результате чего с определенной точностью (определяется) устанавливается, какой длине ртутного столба соответствует 0 $^oС$ и какой 100 $^oС$.

Построение градуировочной характеристики возможно двумя способами.

Первый способ. Известен вид функции преобразования (линейная, квадратичная, логарифмическая и т.д.), но неизвестны коэффициенты, входящие в соответствующие алгебраические уравнения.

Если вид функции преобразования X= f(Q) известен, то необходимо представить ее в виде полинома:

$$F(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + ... + a_m Q^m \qquad (50)$$

и найти значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, ...a_m, которые наилучшим образом соответствуют экспериментальным данным. В этом случае зависимость (50) называется градуировочной характеристикой.

Рассмотрим варианты построения линейной градуировочной характеристики по экспериментальным данным (рис. 25).

Допустим, что при известных значениях входных воздействий Q_1, Q_2, Q_3, …, Q_n получены следующие значения отклонений откликов СИ: X_1, X_2, X_3, …, X_n.

Как видно из рисунка, возможны несколько вариантов построения градуировочной характеристики по экспериментальным данным. Вопрос о том, какой из этих вариантов наилучший, должен решаться на основе какого-нибудь критерия.

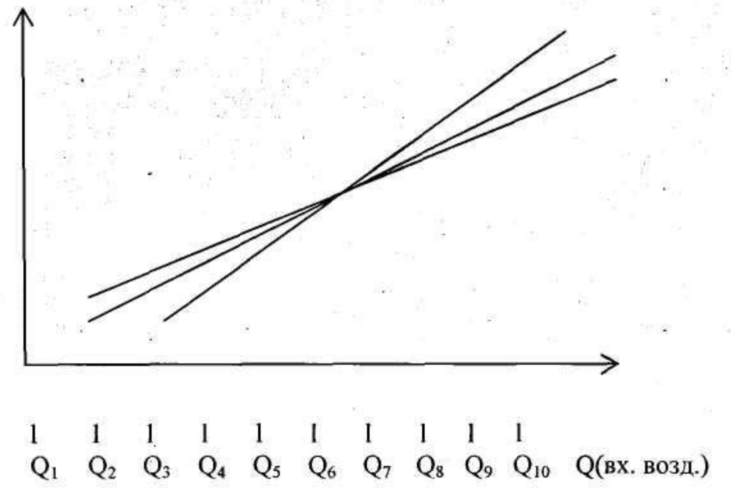


Рисунок 25

Если отклики СИ на известные значения входных воздействий подчиняются нормальному закону распределения, то обычно используется критерий наименьших квадратов. По критерию наименьших квадратов минимизируется сумма квадратов отклонения откликов от градуировочной характеристики:

$$\Sigma\left(x_i - f\left(Q\right)\right)^2 = 0 \qquad (51)$$

или

$$\Sigma\left(x_i - a_0 - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_m Q_m\right)^2 = 0.$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ устанавливающие оптимальную градуировочную характеристику по критерию наименьших квадратов, определяются из условия равенства нулю производных от этой суммы по каждому коэффициенту, т.е.

$$a_0 = d / da_0 (\Sigma\left(x_i - a_0 - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_m Q_m\right)^2) = 0,$$

$$a_1 = d / da_0 (\Sigma\left(x_i - a_0 - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_m Q_m\right)^2) = 0$$

и т.д.

Второй способ. Вид функции преобразования неизвестен. Если неизвестен вид функции преобразования, возникает задача аппроксимации экспериментальных данных, полученных при градуировке СИ, аналитической зависимостью. Задачу отыскания полученной аппроксимации можно решить также методом наименьших квадратов.

Решение ее методом наименьших квадратов отличается от решения предыдущей задачи только тем, что неизвестна степень полинома, т.е.

$$f(Q) = a_0 + a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots \qquad (52)$$

Степень полинома устанавливается в зависимости от точности градуировки, после чего минимизируется выражение (50), т.е. сумма квадратов отклонения откликов от градуировочной характеристики:

$$\Sigma\left(x_i - a_0 - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \ldots - a_i Q^i\right)^2 = 0.$$

Количество уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, ..., a_i$ всегда равно количеству неизвестных. В специальной литературе эта задача называется задачей сглаживания.

3.11.2 Переходный режим работы средств измерений

Режим работы СИ до установления показания называется переходным. В этом режиме сказываются инерционные свойства СИ. Оно не успевает должным образом отреагировать на входное воздействие и результат измерения оказывается искаженным.

Переходный режим работы СИ описывается линейным и нелинейным дифференциальными уравнениями динамики. У линейных средств измерений уравнение динамики является неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n}+\ a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ a_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=Q(t).\ (53)$$

где Q(t) – известный входной сигнал;

$\frac{dx}{dt}$ – отклик, выходной сигнал.

Существуют три способа решения уравнения динамики: классический, операторный, спектральный.

Классический метод решения уравнения динамики

Решением неоднородного уравнения динамики (53) является следующее выражение:

$$X=x_0+x_r, \qquad (54)$$

где x_0 – общее решение однородного уравнения (55).

$$a_n\frac{d^n x}{dt^n}+\ a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ a_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x. \qquad (55)$$

x_r – частное решение уравнения (53).

Для решения однородного уравнения (55) необходима его алгебраизация, основанная на свойстве дифференцирования экспоненциальной функции. При $x=e^{rt}$ уравнение (55) примет следующий вид:

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}(e^{rt})+\ a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{rt})+$$
$$+\ a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(e^{rt})+...+a_1\frac{d}{dt}(e^{rt})+a_0e^{rt}+... \qquad (56)$$

Для решения уравнения (56) введём следующие обозначения:

Rt=U, $\quad e^{rt}=e^u$

тогда

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}(rt)=r$$

$$\frac{d}{dt}(e^{rt})=\frac{d}{dt}(r^u)=\frac{de^u}{dt}=\frac{de^u}{du}\cdot\frac{du}{dt}=e^u\cdot r=re^{rt}$$

$$\frac{de^n}{dt}(e^{rt})=r^n e^{rt}$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt}(e^{rt})=r^{n-1}e^{rt}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{rt})=re^{rt}\ .$$

То есть уравнение (56) можно записать следующим образом:

$$\left(a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+...+a_1r+a_0\right)e^{rt}=0. \qquad (57)$$

Это равенство выполняется при условии:

$$\left(a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+...+a_1r+a_0\right)e^{rt}=0. \qquad (58)$$

Решение уравнения (58) сводится к решению уравнения (57), т.е. к отысканию корней уравнения (57), которое называется характеристическим. Если все корни характеристического уравнения разные: r_1, r_2, …, r_b, …, r_n, то каждому из них соответствует решение $X_l = l^{rt}$ однородного уравнения (55). Общее решение однородного уравнения в этом случае будет:

$$X_0=в_1\lambda^{r_1t}в_2^{r_2t}+...+в_n\lambda^{r_nt},$$

где $в_1, в_2, ..., в_n$ – произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (53) зависит от вида функции Q(t).

Операторный метод решения уравнения динамики. Передаточная функция. При сложных функциях *Q(t)* отыскание частного решения X_r уравнения (53) превращается в проблему. В этих случаях пользуются операторным методом решения уравнения динамики.

Идея операторного метода состоит в алгебраизации уравнения динамики путем перехода от временных зависимостей к зависимости от комплексного параметра $P=\alpha+\omega\gamma$ посредством интегрального преобразования Лапласа:

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= \int_0^{\infty} X(t)e^{-pt}dt \\ Q(P) &= \int_0^{\infty} Q(t)e^{-pt}dt \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

X(P) и Q*(P)* называются изображениями *X(t)* и Q*(т),* а *X(t)* и *Q(t)* − оригиналами *X(P)* и *Q(P).* Сама операция (59) представляет собой прямое преобразование Лапласа и обозначается:

L[x(t)]=X(P)

L[Q(t)]=Q(P).

Тогда уравнение динамики (53) примет вид:

$$\begin{aligned} &a_n L[X^{(n)}(t)] + a_{n-1}L[X^{(n-1)}(t)] + a_1 L[X(t)] + \\ &+ a_0 L[X(t)] = Q(P)... \end{aligned} \qquad (60)$$

Изображение первой производной:

$$L[X'(t)] = \int_0^{\infty} X'(t)\cdot\lambda^{-pt}\cdot dt = \int_0^{\infty}\lambda^{-pt}\cdot dX(t) \qquad (61)$$

так как $\dfrac{dx(t)}{dt} = X'(t).$

Интегрирование по частям дает:

$$L[X'(t)] = X(t)\lambda^{-pt}\int_0^{\infty} + P\int_0^{\infty} X(t)\cdot\lambda^{-pt}\cdot dt = X(O) + pX(P). \quad (62)$$

Аналогично можно показать, что

$$\left.\begin{aligned} L[X''(t)] &= p^2X(P) - pX(0) - X'(0); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L[X^n(t)] &= p^nX(P) - p^{n-1}X(0) - p^{n-2}X(0) - \ldots - X^{(n-1)}(0) \end{aligned}\right\}(63)$$

С учетом выражений (63) дифференциальное уравнение динамики при нулевых начальных условиях преобразуется в алгебраическое:

$$\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right)X(P) = Q(P) \qquad (64)$$

Отношение

$$W(P) = \frac{X(P)}{Q(P)} = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} \qquad (65)$$

называются передаточной функцией.

Как дифференциальное уравнение динамики (53), так и передаточная функция (65) характеризуют инерционные свойства средств измерений и используются для изучения переходного режима работы СИ.

Зная передаточную функцию W(P) и изображение входного воздействия на средство измерения Q(P), можно найти изображение отклика СИ на это входное воздействие:

X(P) = W(P) · Q(P). (66)

Применив обратное преобразование Лапласа, можно найти и сам отклик:

$$X(t) = \frac{1}{2ry}\cdot\int_{\alpha-\gamma\infty}^{\alpha-\gamma\infty} X(P)\lambda^{pt}dp. \qquad (67)$$

Обратное преобразование Лапласа обозначается:

$L^{-1}[X(P)] = X(t).$

Спектральный метод решения уравнения динамики. Для некоторых видов входных воздействий для алгебраизации уравнения динамики удобнее воспользов аться не преобразованием Лапласа, а преобразованием Фурье:

$$\left.\begin{aligned} X(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\lambda^{\gamma\omega t}\,dt \\ Q(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)\lambda^{-\gamma\omega t}\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

где X(W) – комплексный спектр отклика X(t);

Q(W) – комплексный спектр входного воздействия Q(t).

Операция (68) называется прямым преобразованием Фурье и обозначается:

$$\Phi[X(t)] = X(W)$$

$$\Phi[Q(t)] = Q(W).$$

В этом случае уравнение динамики (53) примет вид:

$$a_n\Phi\left[X^{(n)}(t)\right] + a_{n-1}\Phi\left[X^{(n-1)}(t)\right] + \ldots + a_1\Phi\left[X'(t)\right] +$$
$$+ a_0\Phi\left[X(t)\right] = \Phi\left[Q(t)\right]$$

Спектр первой производной

$$\Phi[X'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X'(t)\cdot\lambda^{-\gamma\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-\gamma\omega t}\,d[X(t)] \qquad (69)$$

так как $\dfrac{dx(t)}{dt} = X'(t)$.

После интегрирования по частям получим:

$$\Phi[X'(t)] = X(t)\lambda^{-\gamma\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} - \gamma\omega\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\lambda^{-\gamma\omega t}\,dt = \gamma\omega\cdot X(W). \qquad (70)$$

Аналогично получим:

$$\Phi[X''(t)] = (\gamma\omega)^2 X(W)$$

....

$$\Phi[X^{(n)}(t)] = (\gamma\omega)^n X(W).$$

С учетом этих соотношений дифференциальное уравнение динамики преобразуется в алгебраическое:

$$\left[a_n(\gamma\omega)^n + a_{n-1}(\gamma\omega)^{n-1} + \ldots + a_1\gamma\omega + a_0\right] = X(W) = Q(W). \qquad (73)$$

Отношение

$$K\left(W = \frac{X(W)}{Q(W)} = \frac{1}{a_n(\gamma\omega)^n + a_{n-1}(\gamma\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(\gamma\omega) + a_0}\right)$$

называется комплексным коэффициентом преобразования (передачи). Модуль комплексного коэффициента преобразования называется амплитудно-частотной характеристикой, а фаза J(W) – фазочастотной. Зная комплексный коэффициент преобразования K(W), комплексный спектр входного воздействия Q(W), можно найти комплексный спектр отклика X(W):

$$X(W) = Q(W)\cdot K(W).$$

Применив обратное преобразование Фурье, можно найти и сам отклик:

$$Xt = \frac{1}{2\tilde{n}}\int_{-\infty}^{\infty} X(W)\cdot\lambda^{\gamma\omega t}\,dt.$$

Обратное преобразование Фурье обозначается:

$$\Phi^{-1}[X(W)] = X(t).$$

4 РЕКОМЕНДАЦИИ МЕЖДУНАРОДНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ ПО ВЫРАЖЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Задача обеспечения международного единства к представлению и оцениванию погрешностей измерения является наиболее актуальной проблемой.

Международный комитет мер и весов (МКМВ) в 1978 г. поручил рассмотреть эту проблему международному бюро мер и весов (МБМВ) с национальными метрологическими институтами.

Был подготовлен вопросник, где освещались основные проблемы. Вопросник был разослан 32 национальным лабораториям по стандартизации, заинтересованным решением этой проблемы, а также 5 международным организациям. Среди вводных вопросов в нем были, например, такие:

1) Как следует выражать случайную погрешность: с помощью среднего квадратического отклонения (СКО) или с помощью доверительной вероятности?

2) Следует ли различать несколько типов погрешностей, если да, то как их выражать?

К концу 1978 г. ответы были получены от 21 лаборатории. Подавляющее большинство высказались за выражение случайной погрешности через СКО, при условии, что будет указано число степеней свободы. Выражение погрешности измерения через доверительный интервал зависит от произвольного выбора доверительной вероятности и предполагает нормальный закон распределения, поэтому предпочтительнее использование СКО, так как он не зависит от этих дополнительных гипотез. Сложнее оказались ответы на второй вопрос. На него спектр ответов был довольно обширен. Что касается систематических погрешностей, было немало колебаний с выбором максимальных границ, доверительных интервалов или СКО. Многие лаборатории высказались за приведение случайных и систематических погрешностей к единой общей погрешности.

С 21 по 23 сентября 1980 г. в Севре в Международном бюро мер и весов состоялось заседание Рабочей группы для решения вопроса о том, какие погрешности следует приписывать к экспериментальным данным, и выработки практических рекомендаций.

На заседании рабочей группы были зачитаны ответы, присланные на вопросник, и далее шло обсуждение.

Рабочая группа единодушно приняла, что случайная погрешность должна выражаться оцененными вариациями или в виде СКО – Si, при обязательном указании числа

степеней свободы Vi. По поводу систематической погрешности рабочая группа внесла предложение не использовать больше этот термин, так как его значение часто бывает неустойчивым, неоднозначным и неправильно понимается.

Господин Колм (США) предложил делать различие между двумя категориями составляющих погрешностей по принципу:

1) погрешности группы А – погрешности, которые можно оценить объективными статистическими методами;

2) погрешности группы В – погрешности, которые оценивают другими методами.

После обсуждения рабочая группа пришла к выводу, что, учитывая наши ограниченные знания о так называемой «систематической» погрешности, ее необходимо обрабатывать в соответствии с вероятностной моделью. Отмечалось, что различие между группами А и В не такое уж явное, и может случится так, что придется колебаться при определении группы. Тем не менее это не должно вызывать реальных последствий, так как обе группы погрешностей обрабатываются в соответствии с вероятностной моделью. Далее было предложено: для различия погрешности группы А обозначать через Sj, а группы В – через Uj и назвать ее вариацией. Кроме того, рабочая группа договорилась о том, что вклады в погрешность от обоих категорий (А и В) будут рассматриваться как имеющие случайный характер. Поэтому предлагалось определять комбинированную погрешность путем суммирования погрешностей А и В, если между ними нет корреляционной связи.

Рабочей группой был составлен отчет рабочей группы МБМВ по определению погрешностей и принят проект «Рекомендация ING-1 (1980). Определение экспериментальных погрешностей».

4.1 Рекомендации INC-1

1 Погрешность результата измерений, как правило, состоит из нескольких составляющих, которые можно разделить на две категории в зависимости от способа оценки их численного значения: А – погрешности, оцениваемые статистическими методами; В – погрешности, оцениваемые другими методами. Не всегда имеется простое соответствие между классификацией по категориями А и В с ранее использовавшейся классификацией «случайные» и «систематические» погрешности. Термин «систематическая погрешность» может вводить в заблуждение, и его следует избегать.

2 Составляющие категории А характеризуются оцененными вариациями – Si^2 (или оцененными «СКО» – Si) и числом степеней свободы – Vi. Там, где необходимо, следует указывать ковариации.

3 Составляющие категории В должны характеризоваться величинами Uj^2, которые могут рассматриваться как приближения к соответствующим вариациям, предполагающим их существование. Там, где необходимо, можно рассматривать и ковариации.

4 Комбинированная погрешность должна характеризоваться численным значением, полученным при использовании обычного метода для комбинации вариации. Комбинированная погрешность и ее составляющие должны быть выражены в виде СКО.

5 Если в особых случаях требуется умножить комбинированную погрешность на коэффициент с целью получить общую погрешность, то этот коэффициент обязательно должен быть указан.

4.2 Рекомендация 1 (МК-1981) «Выражение экспериментальных неопределенностей измерения»

МКМВ, рассмотрев отчет, представленный Рабочей группой по определению неопределенностей, на 70-й

сессии в октябре 1981 г. принял рекомендацию INS-1 (1981).

МКМВ, учитывая необходимость выработки единой формы выражения неопределенностей в метрологии, прогресс, достигнутый в поиске приемлемого решения, рекомендовала МБМВ предпринять все усилия для применения принципов, заложенных в этих предложениях, к международным сличениям, которые будут проводиться при его содействии в будущем. Также было предложено заинтересованным лицам изучать и практически применять эти рекомендации, а также сообщать свое мнение в МБМВ, чтобы в течение 2-3 лет оно выработало указание по их практическому применению. То есть рекомендовалось широкое распространение предложений, выдвинутых рабочей группой, применение принципов, заложенных в INS-1 (1980) при международных стечениях, сбор мнений по практическому применению INS-1 (1980) в течение 2–3 лет.

4.3 Рекомендация INS-1 (1986) «Выражение неопределенностей в работах, проводимых МКМВ»

МКМВ, учитывая, что Рабочая группа по определению неопределенностей приняла рекомендацию INS-1 1980, а МКМВ – 1 (МК – 1981), а также принимая во внимание, что некоторые члены консультативных комитетов нуждаются в пояснении данной рекомендации, приводит пояснение к параграфам 4 и 5 рекомендации 1 (МК - 1981).

1. Параграф 5 IBS-1 1980, относящийся к особым случаям (особенно имеющим промышленную значимость), в настоящее время рассматривается рабочей группой ИСО, МОЗМ и МЭК при содействии и сотрудничестве МКМВ.

2. Рекомендуется суммарные погрешности типа А и В выражать в виде единого стандартного отклонения.

4.4 Руководство по выражению неопределенности измерения

Поскольку результаты измерений заинтересовали специалистов повсеместно, МКМВ передал разработку подробного руководства Международной организации по стандартизации (ИСО), которая могла лучше выразить интересы науки. Техническая консультативная группа по метрологии создала рабочую группу (ISO/TAG4/G3) из экспертов, представляющих наиболее авторитетные в мире организации: по метрологии – МБМВ и МОЗМ; по стандартизации – ИСО и МЭК.

Итогом работы этой группы было составление «Руководства по выражению неопределенности измерения», которое было издано в 1993 г. под эгидой семи международных организаций: МКМВ, МЭК, ИСО, МОЗМ, международного союза по чистой и прикладной физике (ИЮРАК), международного союза по чистой и прикладной химии (ИЮРАП), международной федерация клинической химии (МФКХ).

Цель этого руководства – обеспечить полную информацию о том, каким образом получены показатели неопределенности и обеспечение возможности международного сравнения результатов измерения.

4.4.1 Термины и определения, применяемые в «Руководстве по выражения неопределенности измерения»

Измеряемая величина – свойство явления, объекта или вещества, которое может определяться качественно и количественно.

Примечания.

1. Термин «величина» может обозначать величину в общем смысле или величину в конкретном смысле. Например, величины в общем смысле: длина,

температура, время, масса, электрическое сопротивление и т. д., а величина в конкретном смысле: длина данного стержня, температура в комнате.

2. Величины, которые можно располагать по порядку значений друг относительно друга, называются однородными.

3. Однородные величины могут быть сгруппированы по категориям величин, например:

– работа, теплота, энергия;

– толщина, длина окружности, длина волны.

Значение величины – значение конкретной величины, выражаемое, как правило, произведением единицы измерения на число, например масса стержня 0,55 кг.

Примечания.

1. Значение величины может быть положительным, отрицательным или нулевым.

2. Значение величины может быть выражено разными способами.

3. Значения величин, имеющих размерность 1, как правило, выражают безмерным числом.

4. Величина, которая не может быть выражена ссылкой на принятую условную шкалу или измерительную процедуру, или на то или другое.

Истинное значение (величины) – значение, соответствующее определению данной конкретной величины.

Примечания.

1. Это значение, которое могло бы быть получено при идеальном измерении.

2. Истинное значение по природе не определимо.

Термин «истинное значение» измеряемой величины в Руководстве не применяется, так как слово «истинное» рассматривается как избыточное. Термин «измеряемая величина» означает «данная величина, подлежащая измерению». Следовательно, термин «значение измеряемой величины» означает «значение величины, подлежащей измерению». Кроме того, понятие «истинное» значение является идеализированным.

Действительное значение величины – значение, приписываемое конкретной величине и принимаемое, часто по соглашению, как имеющую неопределенность, приемлемую для данной цели.

Пример. Значение, приписываемое величине, воспроизводимой эталоном, может быть принято в качестве действительного значения.

3. Рекомендованное КОДАТО в 1986 г. значение для постоянной величины составляет $6{,}0221357 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Примечания.

1. «Действительное значение величины» иногда называют приписанным, или исходным значением.

2. Часто для определения действительного значения используется несколько результатов измерений.

Измерение – совокупность операций, имеющие целью определения значения величины.

Примечание.

Операции могут выполняться автоматически. Принцип измерения – научная основа измерения.

Примеры:

1 Применение термоэлектрического эффекта для измерения температуры.

2 Применение эффекта Джозефсона для измерения разности электрического потенциала.

3 Применение эффекта Доплера для измерения скорости.

Метод измерения – логическая последовательность операции, описанная в общем виде, которая применяется при выполнении операции.

Примечание.

Методы измерения могут быть разными, например:

– метод измерения замещением;

– дифференциальный метод;

– нулевой метод.

Измерительная процедура – специально описанная совокупность операции, используемой при выполнении конкретных измерений в соответствии с данным методом.

Примечание.

Измерительная процедура обычно вносится в документ, который сам иногда называется «измерительная процедура» (или методы измерения), и обычно содержащие в нем сведения являются достаточными для оператора, чтобы выполнить измерение без дополнительной информации (т. е. МВИ).

Измеряемая физическая величина – конкретная величина, подвергаемая измерению.

Примечание.

Определение измеряемой физической величины может потребовать определения таких величин, как время, температура и давление.

Влияющая величина – величина, которая не является предметом измерения, но отражающаяся на результате измерения.

Пример. Температура окружающей среды.

Результат измерения – значение, приписываемое измеряемой величине, полученное путем измерения.

Примечания.

1 При приведении результата следует ясно указать, относится ли он к:

– показанию прибора;

– результату без учета поправки;

– результату с учетом поправки или среднему нескольких значений.

2 Полная формулировка результата измерения включает информацию о неопределенности измерения.

Неисправленный результат измерения – это результат измерения до введения поправки на систематическую погрешность.

Исправленный результат измерения – результат измерения после введения поправки на систематическую погрешность.

Точность измерения – близость результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

Примечания.

1 Точность является качественным понятием.

2 Не следует употреблять термин «прецизеонность» вместо «точности».

Сходимость результатов измерений – близость результатов последовательных измерений одной и той же последовательной величины, выполненных в одинаковых условиях измерений.

Примечания.

1. Эти условия называются условиями сходимости.

2. К этим условиям относятся:

– одна и та же измерительная процедура;

– один и тот же наблюдатель;

– один и тот же прибор, применяемый в одних и тех же условиях;

– одно и то же место;

– повторение измерений в течение короткого промежутка времени.

3. Сходимость может выражаться через параметры, характеризующие дисперсию результатов.

Воспроизводимость результатов измерений – близость результатов измерений одной и той же величины при проведении измерений в измененных условиях.

Примечания.

1. Для обоснованного утверждения воспроизводимости следует указывать, какие условия были изменены.

2. Изменяющиеся условия могут включать:

– принцип измерения;

– метод измерения;

– наблюдателя;

– измерительный прибор;

– измерительный эталон;

– место;

– условия применения;

– время.

3. Воспроизводимость может быть выражена количественно с помощью параметров, характеризующих дисперсию результатов.

4. В этих случаях обычно подразумевается, что результаты измерения являются исправленными.

Экспериментальное стандартное отклонение – величина $S(g_k)$ для ряда измерений одной и той же измеряемой величины, характеризующая рассеяние результатов и определяемая по формуле:

$$S(g_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(g_k - \overline{g}\right)^2}{n-1}},$$

где g_k – результат K-го измерения;

$\overline{g}$ – среднее арифметическое из n результатов.

Примечания.

1. Если рассматривать ряд значений n как выборку из распределения, то g – несмещенная оценка среднего значения, а S^2 (g_k) – несмещенная оценка дисперсии этого распределения.

2. Выражение $S(g_k)/\sqrt{n}$ является оценкой стандартного отклонения распределения g и называется экспериментальным, стандартным отклонением среднего значения, которое иногда называют средней квадратической погрешностью среднего значения.

Неопределенность измерения – параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые достаточно обоснованно могли бы быть приписаны измеряемой величине.

Примечания.

1. Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или число, кратное ему) или ширина интервала, имеющего указанный уровень доверия.

2. Неопределенность измерения состоит в общем случае, из многих составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены на основании статистического распределения результатов рядов измерений и характеризоваться экспериментальными, стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые также могут характеризоваться стандартными отклонениями, вычисляются из предполагаемого распределения вероятностей, основанного на опыте или другой информации.

3. Подразумевается, что результат измерения является лучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющиенеопределенности, включая составляющие, обусловленные систематическими эффектами, такими как связанные с поправками и эталонами, приводят к рассеянию.

Погрешность измерения – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Примечания.

1. Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное значение.

2. Когда необходимо определить «относительную погрешность» и «погрешность», последнюю иногда называют «абсолютной погрешностью измерения». Этот термин не следует путать с абсолютным значением погрешности, которое является модулем погрешности.

Относительная погрешность – отношение погрешности к истинному значению измеряемой величины.

Примечания.

Так как истинное значение не может быть определено, то на практике изменяется действительное значение.

Случайная погрешность – разность результата измерения, которое может быть получено при бесконечно большом числе повторных измерений одной и той же измеряемой величины в условиях сходимости.

Примечания.

1. Случайная погрешность равна погрешности измерения минус систематическая погрешность.

2. Так как не может быть выполнено огромное число измерений, то можно определить только оценку случайной погрешности.

Систематическая погрешность – разность между средним значением, получаемым при бесконечном числе измерений одной и той же измеряемой величины в условиях сходимости, и истинным значением измеряемой величины.

Примечания.

1. Систематическая погрешность равна погрешности измерения минус случайная погрешность.

2. Как и истинное значение, систематическая погрешность и ее причины не могут быть полностью известны.

Поправка – значение величины, которое алгебраически суммируется с исправленным результатом измерения для компенсации систематической погрешности.

Примечания.

1. Поправка равна оцененной систематической

погрешности, взятой с обратным знаком.

2. Так как систематическая погрешность не может быть известна точно, то компенсация не может быть полной.

Поправочный коэффициент – числовой коэффициент, на который умножают неисправленный результат измерения для компенсации систематической погрешности.

Стандартная неопределенность – неопределенность результата измерения, выраженная как стандартное отклонение.

Оценка неопределенности по типу А – метод оценивания неопределенности путем статистического анализа ряда наблюдений.

Оценка неопределенности по типу В – метод оценивания неопределенности иным способом, чем статистический анализ рядов наблюдений.

Суммарная, стандартная неопределенность – стандартная неопределенность результата измерения, когда результат получают из значений ряда других величин, равная положительному квадратному корню суммы членов. Причем члены являются дисперсиями, или ковариациями, этих других величин, взвешенными в соответствии с тем, как результат измерения изменяется в зависимости от измерения этих величин.

Расширенная неопределенность – величина, определяющая интервал вокруг результата измерения, в пределах которого можно ожидать, находится ли большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могли быть приписаны измеряемой величине.

Примечания.

1. Эта часть распределения может рассматриваться как вероятность охвата или уровень доверия для интервала.

2. Установление связи между конкретным уровнем

доверия и интервалом, определенным расширенной неопределенностью, требует явных и неявных предположений относительно распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения и его суммарной, стандартной неопределенностью. Уровень доверия, который может быть приписан этому интервалу или известен только до той степени, в которой такие предположения могут быть оправданы.

3. Расширенная неопределенность называется общей неопределенностью.

Коэффициент охвата – числовой коэффициент, используемый как множитель суммарной, стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности.

Примечания.

Коэффициент охвата К обычно находится в диапазоне от 2 до 3.

4.4.2 Вычисление стандартной неопределенности

4.4.2.1 Моделирование измерения

В большинстве случаев измеряемая величина У не является прямо измеряемой, а зависит от N других измеряемых величин X_I, X_2, ... X_n и определяется через функциональную зависимость:

$$У = (x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (72)$$

Например, энергия Р (измеряемая величина), рассеиваемая при температуре t терморезистором, который имеет значение R_o при температуре t_0, линейном температурном коэффициенте сопротивления L с разностью потенциалов V, подаваемых на клеммы, зависит от V, R_o, L и t :

$$P=f(v, R_0, a, t) = v^2 / R_0 [(1+ a(t-t_0)].$$

Величины X_I, X_2, ... X_n называют входными. Эти величины, в свою очередь, могут зависеть от других величин (факторов), что ведет к сложной функциональной зависимости.

Функцию f в том виде как, она представлена в Руководстве, необходимо интерпретировать в широком смысле, а именно, как функцию, содержащую все входные величины, включая поправки и поправочные коэффициенты.

Если данные показывают, что функция f не содержит все входные величины, то необходимо включать дополнительные величины. Например, входные величины можно разделить на следующие категории:

– величины, чьи значения и неопределенности определяются непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате одного наблюдения, повторных или на опыте предыдущих наблюдений. Они могут потребовать введение поправок в показание прибора и на влияющие величины, такие как температура, давление и т. д.;

– величины, чьи значения и неопределенности вносятся в измерение от внешних источников, например, величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов или стандартными справочными данными.

Оценку измеряемой величине У обозначают через у и получают из уравнения (72), используя входные оценки $X_I, X_2, ..., X_n$ где x_1, x_2,... x_n – оценки входных величин $X_I, X_2, ..., X_n$.

Следовательно, входная оценка У, которая является результатом измерения, выражается следующим образом:

$$Y = f\,(X_1, X_2, ...,X_n). \qquad (73)$$

В некоторых случаях оценку можно получить как:

$$Y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} f\,(x_{1,k1}, x_{2,k}, ..., x_{N,k}). \qquad (74)$$

Оцененное стандартное отклонение, которое

связанно с выходной оценкой или с результатом измерения у (суммарной стандартной неопределенностью и обозначаемой $U_c(y)$, получают из оцененного стандартного отклонения, связанного с каждой входной оценкой x_i (называемой стандартной неопределенность и обозначаемой $U(X_i)$.

4.4.2.2 Оценивание стандартной неопределенности по типу А

В большинстве случаев лучшей оценкой мот. ожидания величин g, изменяющегося случайным образом, является среднее арифметическое, или среднее, значение g:

$$\overline{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_k. \qquad (75)$$

Экспериментальную дисперсию наблюдений определяют по формуле:

$$S(g_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(g_k - \overline{g})^2. \qquad (76)$$

Экспериментальное стандартное отклонение соответственно равно:

$$S(g_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(g_k - \overline{g})^2}, \qquad (77)$$

Наилучшая оценка дисперсии среднего значения равна:

$$S^2(\overline{g}) = \frac{S^2(g_k)}{n}, \qquad (78)$$

где $S^2(\overline{g})$– экспериментальная дисперсия среднего.

Экспериментальное стандартное отклонение среднего:

$$S(\overline{g}) = \sqrt{S^2}\,(g). \qquad (79)$$

Оно может быть использовано в качестве меры неопределенности $(\overline{g})$. Для входной величины Xi, определенной из n независимых повторных наблюдений Xi, k, стандартная неопределенность ее оценки вычисляется по формуле 76, а оценка стандартной неопределенности – по формуле 78. Иногда $S^2(g_k)$ называют дисперсией типа А, а $S^2(\bar{g})$ – стандартной неопределенностью типа А.

4.4.2.3 Оценивание стандартной неопределенности по типу В

Дисперсия и стандартная неопределенность для входной величины, которая не была получена в результате повторных наблюдений, определяется на базе научного суждения, основанного на априорной информации.

Априорной информацией могут быть:

– данные предварительных измерений;

– данные, полученные в результате опыта, или значение свойств соответствующих материалов и приборов;

– спецификации изготовителя;

– данные, которые приводятся в свидетельствах о калибровке и других сертификатах;

– неопределенности, приписываемые справочным данным, взяты из справочников.

Дисперсию $U^2(x_i)$ называют дисперсией по типу В, а неопределенность по $U(x_i)$ – неопределенностью по типу В.

4.4.3 Определение суммарной стандартной неопределенности

4.4.3.1 Некоррелированные входные величины

Стандартная неопределенность у оценки измеряемой величины У получается путем суммирования стандартных неопределенностей входных оценок. Эта суммарная стандартная неопределенность оценки У обозначается

$u_c(y)$, и представляет собой положительный квадратный корень из суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, полученной из формулы:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 u^2(x_i)... \qquad (80)$$

где f – функция, приведенная в уравнении (72);

$u(x_i)$ – стандартная неопределенность.

Суммарная стандартная неопределенность представляет собой оцененное стандартное отклонение и характеризует разброс значений, которые с достаточным основанием могут быть приписаны измеряемой величине.

Уравнение (72) для некоррелированных входных величин базируется на аппроксимации У=$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ рядом Тейлора первого порядка:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \qquad (81)$$

При значительной нелинейности функции f в ряд Тейлора первого порядка должны быть включены члены более высокого порядка. Когда распределение каждого X_i располагается симметрично относительно своего среднего значения, самыми важными членами более высокого порядка являются:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx_i \cdot dx_j} \right)^2 + \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{d^3 f}{dx_i \cdot d^2 x_j} \right\} u^2(x_i) u^2(x_j). \qquad (82)$$

Частные производные $\frac{df}{dx_i}$ равны $\frac{df}{dX_i}$.

$\frac{df}{dx_i}$ – называются коэффициентами чувствительности и показывают, как выходная оценка У изменяется с изменением значении входных оценок $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Изменение выходной оценки y, вызванное небольшим изменением Δx_i во входной оценке x_i, определяется формулой:

$$(\Delta y) = \left(\frac{df}{dx_i}\right) \cdot \Delta x_i. \qquad (83)$$

Если изменение Δx_i образовано стандартной неопределенностью оценки x_i, соответствующее изменение в выходной оценке У будет:

$$\frac{df}{dx_i} \cdot u(x_i). \qquad (84)$$

Поэтому суммарную дисперсию $u_c^2(y)$ можно рассматривать как сумму членов, каждый из которых представляет оцененную дисперсию, связанную с выходной оценкой y, вызванной изменением входной оценки x_i.

Следовательно, уравнение (72) можно записать следующим образом:

$$u_c^2(y) = \sum \{c_i \cdot u(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y), \qquad (85)$$

где $c_i = \dfrac{df}{dx_i}$; $u_c(y) = [c_i] \cdot u(x_i)$.

Коэффициент чувствительности $\dfrac{df}{dx}$, вместо того чтобы рассчитываться из функции *f*, иногда определяется экспериментальным путем с помощью измерения изменения в У, вызванного изменением в выбранной входной величине x_i, при этом поддерживая остальные входные величины жизненными.

В этом случае определение функции f соответственно сводится к эмпирическому разложению в ряд Тейлора 1-го порядка, основанного на измеренных

коэффициентах чувствительности.

Если уравнение (72) для измеряемой величины У расширяется относительно номинальных значений $X_{i,o,}$ то разложение в ряд Тейлора 1-го порядка будет иметь вид:

$$У = У_o + c_1\, б_1 + c_2\, б_2 + ... + c_N\, б_N, \qquad (86)$$

где $У_o = f\,(x_{1,o}, x_{2,o}, \ldots, x_{n,o})$,

$C_i = \dfrac{df}{dx_i}$, оцененные при $x_i = x_{i,o}$ и $б_i = x_i - x_{i,o}$.

Таким образом, в целях анализа неопределенности измеряемая величина может аппроксимироваться линейной функцией ее переменных путем преобразования входных величин от x_i к $б_i$.

Если У имеет вид $У = c \bullet x_1^{p} \bullet x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$ и известно, что степени P_i представляют собой положительные или отрицательные числа, имеющие пренебрежительно малые неопределенности, то суммарную дисперсию (80) можно выразить следующим образом:

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} \{P_i \cdot u(x_i)/x_i\}^2 \ldots \qquad (87)$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение (85), только вместо суммарной дисперсии $u_c^2(y)$ определяется относительная суммарная дисперсия $\{u_c(u)/y\}^2$, а вместо оцененной дисперсии $u^2(x_i)$, связанной с каждой входной оценкой, – оцененная относительная дисперсия $\{u_c(x_i)/x_i\}^2$.

$u_c(y)/|y|$ принято называть относительной суммарной стандартной неопределенностью, а $u(x_i)/|x|$ при $|y| \neq 0$ и $|x_i| \neq 0$ – относительной стандартной неопределенностью каждой входной оценки.

4.4.3.2 Коррелированные входные величины

Если какие-либо входные величины x_i коррелированы между собой, то необходимо брать в расчет их корреляцию.

Если входные величины коррелированы, то суммарная дисперсия будет определяться по формуле:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{df}{dx_j}\cdot u(x_i, x_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{df}{dx_i}\right)\cdot u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{df}{dx_j}\cdot u(x_i, x_j)... \qquad (88)$$

где x_i и x_j – оценки x_i и y_j;

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ – оцененные ковариации, связанные с x_i, x_j.

Ковариация двух случайных переменных является мерой их взаимной зависимости. Ковариация случайных переменных y и z определяется по формуле:

$\mathrm{cov}(y, z) = cov(z, y) = E\{[y - E(y)] \cdot [z - E(z)]\}$

$\mathrm{cov}(y, z) = cov(z, y) = \iint (y - \mu_y)(z - \mu_z)p(y, z)dydz =$

$\iint yzp(y, z)dydz - \mu_y \cdot \mu_z$

μ_y и μ_z – мат. ожидание случайной величины y и z.

Степень корреляции между x_i и x_j характеризуется оцененным коэффициентом корреляции:

$$ч(x_i, x_j) = u(x_i, x_j)/u(x_i)u(x_j)... \qquad (89)$$

где $ч(x_i, x_j) = ч(x_j, x_i) = u - 1 \le ч(x_j, x_i) \le 1$.

Второй член уравнения (88) можно записать в виде:

$$2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{df}{dx_j}\cdot u(x_i)\cdot u(x_j)\cdot ч(x_i, x_j)... \qquad (90)$$

Подставив выражение (90) в формулу (88), получим:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{df}{dx_j}\cdot u(x_i, x_j) =$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}c_1^2\cdot u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}c_i c_j\cdot u(x_i,)u(x_j)ч(x_i, x_j)... \qquad (91)$$

Рассмотрим две случайные величины g и ч и пусть средние арифметические этих величин соответственно равны $\overline{g}$ и $\overline{ч}$. Если эти две величины зависимы между собой, то ковариация $\overline{g}$ и $\overline{ч}$ оценивается по формуле:

$$s(\overline{g}, \overline{ч}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{K=1}^{n}(g_k - \overline{g})(ч_к - \overline{ч})... \qquad (92)$$

Уравнение (92) рассматривают оценкой ковариации по типу *А*.

4.4.4 Определение расширенной неопределенности

Расширенную неопределенность получают путем умножения суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ на коэффициент охвата к:

u = К u_c(y).

Тогда результат измерения будет выражаться как

У = y + u.

Это означает, что наилучшей оценкой значения, приписываемого измеряемой величине У, является y и что интервал от y-У до y+У содержит большую часть распределения значений, которые с достаточным основанием можно приписать У.

Термин «доверительный интервал» не используется в Руководстве, так как его можно было бы применять в том случае, если бы все составляющие неопределенности, входящие в u_c(y) – суммарную неопределенность, были получены из оценивания по типу А. В нем также не применяется термин «доверительный уровень», а вместо него предлагается термин «уровень доверия»; коэффициент охвата – от 2 до 3.

ЛИТЕРАТУРА

1 Брянский Л. Н. Сколько там за окном? (Из истории температурных шкал) // Законодательная и прикладная метрология. 2000. №2.

2 Брянский Л. Н. Шкалы измерений. Прошлое и настоящее // Законодательная и прикладная метрология. 2000. №5.

3 Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. 288 с.

4 Д. И. Менделеев – основоположник современной метрологии: Под ред. В.В. Бойцова / ВНИИ метрологии им. Д.И. Менделеева. М.: Изд-во стандартов, 1978. 240 с.

5 Кузнецов В. А., Ялунина Г. В. Основы метрологии: Учеб. пособие. М.: Изд-во стандартов, 1995. 280 с.

6 Маркин Н. С. Практикум по метрологии: Учеб. пособие. М.: Изд-во стандартов, 1994. 188 с.

7 Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Изд-во Наука. Глав. ред. физико-математической литературы, 1977.

8 Шабалин С. А. Прикладная метрология в вопросах и ответах. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Изд-во стандартов, 1990. 192 с.

9 Шишкин И. Ф. Прикладная метрология. Учеб. пособие. Изд. 2-е, доп. и испр. М.: Изд-во ВЗПИ, 1990. 117с.

10 Шишкин И. Ф. Теоретическая метрология: Учеб. пособие. Л., 1980.

11 Шишкин И. Ф.Прикладная метрология: Учеб. пособие. Л., 1985.

12 Шишкин И. Ф. Основы метрологии, стандартизации и контроля качества: Учеб. пособие. М., 1987.

13 Шишкин И. Ф., Яншин В. Н. Прикладная метрология: Учеб. для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: РИЦ «Татьянин день», 1993. 10 с.

14 ГОСТ 8.057-80 ГСИ. Эталоны единиц физических величин.

15 ГОСТ 8.061-80 ГСИ. Поверочные схемы. Содержание и построение.

Ключевые слова: измерение, результат измерения, погрешность измерения, объект измерения, измерительная информация, обработка результатов измерения, средства измерения, метод измерения, эталоны

Хамханова Дарима Нимбуевна

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *Т. Н. Чудинова*

Подписано в печать 27.02.2006 г. Формат 60×84 1/16. Печать операт., бумага писчая. Усл.п.л. 9,76. Тираж 100 экз. Заказ № 5.

Издательство ВСГТУ
670013 г.Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 в.